

STOCKHOLMS UNIVERSITET

KANDIDATARBETE

---

# Svart hål i en låda

---

*Student:*  
Daniel PALM

*Handledare:*  
Prof. Ingemar BENGTTSSON

KIKO  
Fysikum

1 september 2016



Stockholms  
universitet

## *Sammanfattning*

Detta kandidatarbete är en studie av självgraviterande system med hjälp av statistisk fysik. Det är grundat i analysen av jämvikt mellan ett svart hål och svartkroppsstrålning av Gibbons och Perry [1], och fördjupas med hjälp av Poincarés vändpunktsmetod [2] [3]. Resultatet blir att jämvikten visas vara stabil i ett större spann av energier i den mikrokanoniska ensemblen. Situationen kan beskrivas som att ett svart hål kan kondensera ut från ren strålning av tillräckligt hög energitäthet.

Vad som är intressant med detta system är att dess värmekapacitet är negativ och för system av denna karaktär härleds ett allmänt krav för stabilitet. Detta tillämpas sedan i kombination med vändpunktsmetoden på flera andra system, däribland självgraviterande partiklar inneslutna i en sfärisk volym. Denna modell visar mer dynamiskt beteende än modellen för ett svart hål i en låda.

Syftet med detta arbete är att lysa nytt ljus på den ofta motintuitiva negativa värmekapaciteten i en mängd illustrationer och exempel. Detta görs utan allt för mycket långa räkningar och slutsatserna kan enkelt avläsas för ett tränat öga från enbart ett par figurer, vilket påvisar styrkan i den statistiska mekaniken.

## **Abstract**

This Bachelor's thesis is a study of self-gravitating systems using statistical mechanics. Based on the analysis of an equilibrium between a black hole and black-body radiation by Gibbons and Perry [1], and further investigated using Poincaré's turning point method [2] [3]. The results are that the equilibrium is shown to be stable for a larger range of energies in the microcanonical ensemble. The situation can be described as a black hole condensing out of the pure radiation at sufficiently high energy densities.

What is interesting about this system is that its heat capacity is negative and a general condition for stability is derived for systems of this character. This is then applied in combination with the turning point method on various other systems, amongst which self-gravitating particles in a spherical container is considered. This model shows greater dynamical content than the black hole in a box model.

The purpose of this thesis is to shine new light on the often counter-intuitive negative heat capacity in a variety of illustrations and examples. This is done without too many long calculations and the conclusions can for the trained eye be found simply by looking at a few figures, once again showing the true power of statistical mechanics.

# Innehåll

<b>Sammanfattning</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduktion</b>	<b>1</b>
1.1 Olika ensembler	1
1.2 Kort om detta arbete	2
1.2.1 Syfte och metod	3
<b>2 Teori</b>	<b>4</b>
2.1 Dimensioner	4
2.2 Postulatet om entropins maximering	4
2.3 Poincarés vändpunktsmetod	5
2.3.1 Definitioner och formaliteter	5
2.3.2 Vändpunktsmetoden	6
2.3.3 Analys av stabilitet	8
<b>3 Svart hål i en låda</b>	<b>11</b>
3.1 Den mikrokanoniska lådan	11
3.2 Stabilitetsanalys	11
3.3 Temperatur och värmekapacitet	17
3.4 Slutsatser och generalisering av resultaten	18
<b>4 Andra system med negativ värmekapacitet</b>	<b>21</b>
4.1 Negativ vattenkapacitet - en liknelse	21
4.2 Självgraviterade system i allmänhet	22
4.3 Partiklar i en sfär	22
4.3.1 Stabilitetsanalys	24
<b>5 Diskussion</b>	<b>28</b>
<b>A Appendix</b>	<b>29</b>
A.1 Variabelbyte för det svarta hålet i lådan	29
<b>Litteratur</b>	<b>31</b>

# 1 Introduktion

*"Thermodynamics have something to say about everything, but cannot tell you everything about anything."*

C. Finley

Termodynamik och statistisk mekanik är mycket kraftfulla verktyg för att analysera ofta invecklade fysikaliska system. Detta kan i regel inte göras fullständigt i detalj för ett allmänt system utan man tvingas många gånger att utgå från enkla modeller och från dessa kan de statistiska metoderna ge en god kvalitativ förståelse för hur något bör bete sig. Som citatet överst på denna sida poängterar kan inte termodynamiken beskriva naturen utan några modeller eller principer för denna, detta då den teorin är ett rent matematiskt ramverk som gör utsagor grundat i sannolikheter. Dessa blir fantastiskt träffsäkra om systemet i fråga består av säg ungefär  $10^{24}$  beståndsdelar, vilket de frekvent gör i vår vardag. För att kunna tillämpa de statistiska idéerna och metoderna behövs riktiga fysikaliska teorier som kopplar verkligheten till matematiken - och det är dessa som är så svåra att hitta.

Om man har en eller flera modeller för olika fysikaliska system som är välgrundade och testade är det intressant att ställa sig frågan hur dessa två skilda system kan bete sig om de får komma i kontakt och betraktas som ett nytt sammansatt system. Detta görs ofta i form av teoretiska tankeexperiment, då många experiment kan vara praktiskt ogenomförbara. Dessa utgår istället från en idealiserad situation med helst elementära modeller för beståndsdelarna. Om det sedan går att motivera hur dessa skulle kunna kvalitativt växelverka med varandra kan man med fördel använda de statistiska metoderna för att dra häpnadsväckande slutsatser. Detta om antagandena för modellerna stämmer såklart och detta är även något att ha i åtanke i betraktande av analyserna som görs i detta arbete.

Grovt sagt är termodynamiken en övergripande teori för mer makroskopiska objekt och behandlar exempelvis hur energi kan flöda mellan dessa och hur detta relaterar till begrepp som värme och temperatur på ett empiriskt vis. Vad den statistiska mekaniken sedan bidrar med är mer sofistikerade metoder för att beskriva olika jämviktssituationer utifrån grundläggande modeller för ett systems mikroskopiska beståndsdelar.

## 1.1 Olika ensembler

När man har valt sina modeller som man vill undersöka är det viktigt att fundera över vilka fysikaliska storheter som är viktiga för systemen i fråga, bland dessa är ideligen energi, temperatur, antalet partiklar och tryck etc. Beroende på det sammanlagda systemets natur lämpar sig beskrivningar med olika antaganden olika bra, delvis eftersom det i allmänhet kan bli svårt att dra några slutsatser med för många fria parametrar men även för att situationerna betraktade från en viss utgångspunkt kan vara rent ofysikaliska. Vad man väljer mellan är vad man tänker sig att hålla som konstant fysikalisk parameter, kallad *kontrollparameter*, och vad som tillåts fluktuera kring en eventuell jämvikt i problemet

och här börjar en viss distinktion från termodynamiken i vilken man försummar alla fluktuationer. Det kan vara naturligt att betrakta systemet med konstant temperatur, fix total energi eller antalet partiklar osv. Vad det är man gör från detta är att valet av *statistisk ensemble*. Bland de många möjliga valen finns det tre som ständigt används och är lämpliga för att beskriva fysikaliska system och dessa är:

- *Mikrokanonisk ensemble*, där den totala energin i en given volym hålls konstant och temperaturen kan variera i systemet.
- *Kanonisk ensemble*, temperaturen väljs istället konstant och systemet tänks kunna utbyta energi med ett stort värmebad.
- *Storkanonisk ensemble*, likt den kanoniska men här kan även antalet partiklar fluktuera.

Med de grundläggande mikroskopiska modellerna ger valet av ensemble en makroskopisk storhet som kan användas för att karakterisera systemet, där den mest välbekanta är *entropin* och det är denna som kommer vara intressant i detta arbete. De makroskopiska storheterna är sådant som kan mätas och därför kan utsagorna senare testas för att se om modellerna faktiskt beskriver verkligheten på ett tillfredsställande vis. Mer om entropin och dess viktiga betydelse i kapitel 2.2.

## 1.2 Kort om detta arbete

De två fysikaliska modellerna som undersöks i kapitel 3 är vad detta arbete grundas på och de är från tillsynes mycket olika områden av fysiken, en rent kvantmekanisk och den andra från den klassiska allmänna relativitetsteorin. Dessa är modellen för svartkroppsstrålning respektive för svarta hål, vilka ej kommer beskrivas i detalj här då detta inte är nödvändigt för att utföra den statistiska analysen. Utan i detta arbete tas följande samband för energin och entropin för svartkroppsstrålningen som givna:

$$E_{sk} = aVT^4 \quad (1.1)$$

$$\mathcal{S}_{sk} = \frac{4}{3}aVT^3 \quad (1.2)$$

Där  $V$  är volymen för den instängda strålningen,  $T$  är dess temperatur och konstanten  $a = \frac{8\pi^5 k_b^4}{15c^3 h^3}$ . [4] Motsvarande samband för det svarta hålets tags likväl som givna:

$$E_{sh} = Mc^2 \quad (1.3)$$

$$\mathcal{S}_{sh} = 4\pi M^2 \quad (1.4)$$

Där  $M$  är det svarta hålets massa, vilket är tillräckligt för en termodynamisk beskrivning av ett ickeroterande och elektriskt neutralt svart hål, som behandlas här för enkelhetens skull. [5]

Vad som lämpligen behövs utöver detta för att kunna sätta upp en mikrokanonisk ensemble med svartkroppsstrålning och svarta hål är någon sorts processer, kallade *ekvibreringsprocesser*, med vilka dessa kan tänkas utbyta energi sinsemellan. Från dessa kan man göra situationen trolig även om detaljerna om hur detta sker inte är helt kända. Att strålningen kan falla in i det svarta hålet och på så sätt öka dess energiinnehåll är uppenbart. Men vad som inte är lika trivialt är en omvänd mekanism med vilken det svarta

hållet kan ge ifrån sig energi. Betyggande nog var detta något som Hawking teoretiskt visade - att om man betraktar effekter från kvantfältteori i närheten av händelsehorisonten av ett svart hål visar det sig tydligen att ett svart hål ska kunna stråla ut partiklar, vilka anmärkningsvärt nog visade sig ha precis samma spektrum som svartkroppsstrålning [5]. Alltså verkar det inte orimligt att betrakta en sammansättning av de två systemen och förvänta sig att de kommer ha någon sorts dynamiskt beteende som skulle kunna föra det mot ett eventuellt jämviktsläge. Fokus i detta arbete kommer att ligga på frågan hurvida det kan finnas någon *stabil* jämviktskonfiguration för systemet. Det vill säga om systemet vid något tillfälle var i jämvikt kommer det att förbli i där. Eller skulle det med tiden utvecklas från detta, vilket då skulle motsvara ett *instabilt* jämviktsläge.

Värt att notera vid detta skede är att problemet med hur de s k ekvibreringsprocesserna och deras eventuella svaga koppling mellan fysiken och matematiken är inte unik i denna modell. Exempelvis uppkommer motsvarande problem med den enkla modellen för en ideal gas - om partiklarna inte tillåts interagera, hur kom de då till jämviktsläget? Utan en stark fysikaliska kopplingen blir modellerna något vaga, där man snarare ser situationen som att om systemet på något sätt hamnat i jämvikt vad kan man dra för slutsatser från de statistiska modellerna.

### 1.2.1 Syfte och metod

Varför detta problem har valts att undersökas, utöver ren nyfikenhet för teoretisk fysik, är för att det ger någon form av ledtrådar om kopplingar mellan kvantmekanik och relativitetsteori. Detta ses från stabilitetsanalysen och om en bättre förståelse för en eventuell kvantgravitationsteori skulle finnas kunde förmodligen även slutsatserna från modellen med det svarta hålet i lådan förstås bättre.

Vidare kommer andra system med *negativ värmekapacitet* undersökas, dessa karakteriseras av att de blir kallare om deras energi ökas där det typiska exemplet är en samling partiklar som låtes få interagera under sin egen gravitation. Detta är en vanlig utgångspunkt för många astronomiska modeller och är därför av intresse, också här särskilt stabilitets aspekten. Vilket är vad som kommer undersökas i mer detalj i detta arbete och vad som blir spännande då är hur det i allmänhet går att relatera instabiliteter för jämvikten till den negativa värmekapacitet i en mikrokanonisk ensemble.

Dessa frågor inom statistisk mekanik kommer undersökas i ljuset av *Poincarés vändpunkts metod*, som beskrivs i detalj i 2.3, och med hjälp av datoriserade hjälpmedel för att göra tydliga illustrationer av problemen och deras lösningar. Med målet att visa hur enkel men samtidigt kraftfull en stabilitetsanalys kan vara.

## 2 Teori

### 2.1 Dimensioner

Eftersom detta arbete behandlar statistisk fysik, kvantmekanik och relativitetsteori är det naturligt att göra följande val av enheter.

$$c = \hbar = G = k_b = 1 \quad (2.1)$$

Dessa kallas *planckenheter* och betyder att exempelvis att tid mäts i samma enheter som sträcka och även att temperatur och energi båda mäts samma enhet. Detta kan vara något förvirrande med vad som visas på axlar i plottar senare i arbetet, men det är inget problem i sig då nästintill inga faktiska värden behövs eller kommenteras i detta arbete eftersom det i grunden är en kvalitativ analys. Exempel på förenklingar som detta val av enheter gör är att konstanten för svartkroppsstrålningen i ekv. 1.2 förenklas till  $a = \frac{1}{15}\pi^2$  och det svarta hålets energi  $Mc^2 \rightarrow M$ .

### 2.2 Postulatet om entropins maximering

Som utgångspunkt för hela detta arbete ligger idén om att det för varje givet system finns en tillståndsfunktion som förblir densamma efter tillräckligt lång tid. Mer specifikt för den mikrokanoniska utgångspunkten är denna *entropin* som antas kunna variera baserat på konfigurationen av ett givet system och detta kommer röra sig mot ett läge där entropin är maximerad.

Entropin är ett något abstrakt begrepp som kan ses på olika sätt. Om en mikroskopisk modell för ett system finns tillhanda och för denna en given mängd diskreta energienheter att dela upp på de kända beståndsdelarna. Då kommer det i princip vara möjligt att beräkna alla dessa konfigurationer  $\Omega$  och resultatet blir då att det makroskopiska tillståndet av systemet som går att uppnås på flest sätt på mikroskopisk nivå är det som systemet troligast hittas i. Eftersom i det fallet definieras entropin enligt:

$$S \equiv \ln \Omega \quad (2.2)$$

Detta är en utsaga om vad som kommer att vara fallet vid jämvikt men om systemet i fråga inte började i jämvikt kommer det mest sannolika vara att systemet konfigurerar om sig självt till tillstånd med högre och högre entropi. När jämvikten väl uppnåtts kommer entropin förbli konstant som funktion av tiden endast med försumbara fluktuationer från maximum av entropin. [6] [7].

En utvidgning av denna syn på entropin kan för den som är bekant med analytisk mekanik utföras. Eftersom ett systems tillstånd specificeras av en punkt i dess fasrum blir entropin istället ett mått på volymen av olika delar av fasrummet som motsvarar samma makroskopiska tillstånd. Då blir det mer intuitivt att tänka att systemet kan börja i ett

godtyckligt tillstånd motsvarande en viss punkt i fasrummet, sedan kommer systemet röra sig längs någon kurva i fasrummet som går till regioner av större och större volym, motsvarande tillstånd av högre entropi. När systemet sedan kommit till den del av fasrummet som är absolut störst, vilket motsvarar maximal entropi, kommer det förbli där eftersom den volymen är mycket större än alla de andra i det tillgängliga fasrummet [8][9].

## 2.3 Poincarés vändpunktsmetod

Följande beskrivning av Poincarés vändpunktsmetod baseras på en mer allmän framställning av G. Arcioni och E. Lozano-Tellechea [2]. Denna metod baseras sig på postulater om maximering av entropin beskriven ovan 2.2, som kommer specificeras ytterligare här, och gäller då i den mikrokanoniska ensemblen. Metoden går dock att generalisera för andra motsvarande tillståndsfunktioner som exempelvis Helmholtz fria energi i den kanoniska ensemblen. Även flera kontrollparametrar  $\{\mu_i\}$  och flera konjugerade variabler kan behandlas med metoden, då ersätts lämpligen  $E \rightarrow \mu_i$  och  $\beta \rightarrow \beta_i$ . Vidare används Einsteins indexnotation.

### 2.3.1 Definitioner och formaliteter

Utgångspunkten är den matematiska mångfalden  $\mathcal{M}$  som är systemets konfigurationsrum över vilken entropin  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(E; X^i)$  och kontrollparametern  $E = E(X^i)$  är mjuka funktioner som antas ha åtminstone kontinuerliga andraderivator. Jämviktstillstånd är punkter i konfigurationsrummet som ger stationära värden på entropin  $\mathcal{S}$  med avseende på förskjutningar  $dX^i$  för vilka  $dE = 0$ , alltså som behåller energin fix. Låt oss för dessa jämviktsslägen definiera den *konjugerade termodynamiska variabeln*  $\beta$  sådan att för alla förskjutningar  $dX^i$ :

$$d\mathcal{S} = \beta dE \quad (2.3)$$

Vilket säger till oss att vid jämvikt beror entropifunktionen endast på energin och det är då därför lämpligt att kalla denna *kontrollparameter*.

Samlingen av alla jämviktspunkterna bildar en undermångfald av konfigurationsrummet  $\mathcal{M}$  som vi kallar  $\mathcal{M}_{eq}$ . Komplementet  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_{eq}$  representerar då mängden av alla icke-jämviktsslägen.

Postulatet om entropins maximering säger att lokalt stabila jämviktsslägen infinner sig för punkter i  $\mathcal{M}_{eq}$  där  $\mathcal{S}$  är lokalt maximum med avseende på godtyckliga variationer  $dX^i$  i  $\mathcal{M}$  som bevarar  $dE = 0$ .

En grundläggande egenskap för jämviktsslägena är ett explicit uttryck för tillståndsfunktionen, som i mikrokanoniska ensemblen är entropin:

$$\mathcal{S}_{eq} = \mathcal{S}(E) \quad (2.4)$$

Alltså integralen av 2.3. Från detta kan vi även bestämma den konjugerade variabeln  $\beta$  längs med jämviktssekvensen explicit enligt:

$$\beta_{eq}(E) = \frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial E} \quad (2.5)$$



Sammanfattningsvis är entropin  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(E; X^i)$  i den mikrokanoniska ensemblen en funktion av kontrollparametern  $E$  och av ett set av okontrollerade variabler  $\{X^i\}$ . Vad som händer enligt det angivna postulatet är att ett system på något vis väljer ett  $X^i = X^i(E)$  sådant att entropin maximeras.

Postulatet om entropins maximering ses nu tydligare i denna formalism som en utsaga om beteendet av entropifunktionen längs icke-jämviktskurvor i konfigurationsrummet. För i allmänhet säger inte jämviktssekvenserna i sig själva något om den lokala stabiliteten av ett jämviktsläge. Eftersom det oftast är endast sambandet för entropin vid jämvikt, 2.4, som är känd är nu frågan hur en stabilitetsanalys faktiskt kan göras. Om man känner den *utökade entropifunktionen*  $\hat{\mathcal{S}}$ , alltså den som vore definierad över hela konfigurationsrummet  $\mathcal{M}$  av intresse, vore saken klar.

### 2.3.2 Vändpunktsmetoden

Dock finns det en kraftfull metod som kommer beskrivas i det följande och som ger möjligheten att göra utsagor om karaktären av stabiliteten av  $\hat{\mathcal{S}}$  endast utgående från tillståndsekvationen vid jämvikt. Framställningen av denna metod följer nära den given i [2].

Antag att det finns ett uttryck för den utökade entropifunktionen åtminstone i närheten av  $\mathcal{M}_{eq}$ , som där kan parametriseras enligt:

$$\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}}(X^i; E) \quad (2.6)$$

Där  $\{X_i\}$  representerar icke-jämviktsvariablerna. Jämvikt infinner sig för värden  $X_{eq}^i = X_{eq}^i(E)$  vilka är lösningar till:

$$\partial_i \hat{\mathcal{S}} \equiv \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial X^i} = 0 \quad (2.7)$$

Det vill säga stationära punkter, från dessa ges entropifunktionen vid jämvikt av:

$$\mathcal{S}_{eq}(E) = \hat{\mathcal{S}}(X_{eq}^i(E); E) \quad (2.8)$$

Från vilken de konjugerade variablerna för icke-jämvikts sekvenserna definieras som:

$$\hat{\beta}(X^i; E) \equiv \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial E} \quad (2.9)$$

Punkten  $X_{eq}^i$  motsvarar ett stabilt jämviktstillstånd om och endast om den ger lokalt maximum för  $\hat{\mathcal{S}}$  vid fixt  $E$ , alltså är vad som behöver undersökas i allmänhet egenvärdena till Hessian matrisen. Om variablerna  $\{X_i\}$  antas kunna väljas så att Hessianen blir diagonal, betyder det att vi är intresserade av de partiella andra derivatorna av  $\hat{\mathcal{S}}$ :

$$\lambda_i(E) \equiv \partial_i^2 \hat{\mathcal{S}}(X^k; E) \Big|_{X^k = X_{eq}^k(E)} \quad (2.10)$$

Om det endast fanns en okontrollerad variabel  $x$  är situationen den mycket bekanta där tecknet av andraderivatan utvärderat i en stationär punkt avslöjar dess karaktär, på motsvarande vis relaterar något  $\lambda_i > 0$  till ett lokalt minima och en instabilitet längs den i-riktningen. Alltså kan en förändring av stabiliteten ske när ett av egenvärdena blir noll och byter tecken. Problemet är här igen att för att kunna beräkna dessa  $\lambda_i$ , även kallade *Poincarés stabilitets koefficienter*, behöver vi den utökade  $\hat{\mathcal{S}}$ , men med följande knep kan

vi få information om tecknet av ett egenvärde  $\lambda_i$  i närheten av där det blir noll utan att explicit räkna ut spektrumet av Hessianen.

Betrakta ekvation 2.7 där vänsterledet utvärderas vid  $X_{eq}^i$  och ta den partiella derivatan med avseende på energin  $E$ , eller i allmänhet en av kontrollparametrarna:

$$\partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial E} \right) = \partial_i \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial E} + \frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial X^k} \frac{\partial X_{eq}^k}{\partial E} \right) = \quad (2.11)$$

$$= \partial_i \beta_{eq} + \partial_i^2 \mathcal{S}_{eq} \frac{\partial X_{eq}^i}{\partial E} + \frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial X^i} \frac{\partial^2 X_{eq}^i}{\partial E \partial X^i} \quad (2.12)$$

$$= \partial_i \beta_{eq} + \lambda_i \frac{\partial X_{eq}^i}{\partial E} = 0 \quad (2.13)$$

Där i första steget nyttjades antagandet om att funktionerna var mjuka över  $\mathcal{M}$  och ordningen på de partiella derivatorna kan växlas. Vidare användes kedjeregeln för funktioner av flera variabler upprepade gånger och i sista steget försvinner sista termen då vi här endast kollar på jämviktsfunktionen för vilken 2.7 gäller.

Vidare tas energiderivatan på den konjugerade parametern från ekvation 2.9:

$$\frac{\partial \beta}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial E} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{eq}}{\partial E^2} + \partial_i \beta_{eq} \frac{\partial X_{eq}^i}{\partial E} \quad (2.14)$$

Detta går att skriva om med hjälp av 2.13 till:

$$\frac{\partial \beta}{\partial E} = \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{eq}}{\partial E^2} - \frac{(\partial_i \beta_{eq})^2}{\lambda_i} \quad (2.15)$$

Vad som vi nu har hittat är ett uttryck för derivatan av den konjugerade parametern  $\beta$  med avseende på kontrollparametern  $E$  vilken endast innehåller derivator med avseende på tillståndsekvationen vid jämvikt. Om man antar att för ett godtyckligt jämviktsläge att  $\frac{\partial^2 \mathcal{S}_{eq}}{\partial E^2}$  är ändlig och att koefficienterna  $\partial_i \beta_{eq}$  även är ändliga och nollskilda kopplar ekvation 2.15 en förändring av stabiliteten till en plott av den konjugerade parametern  $\beta$  mot kontrollparametern  $E$ . En vertikal tangent i detta s k *konjugerade diagrammet* betyder en förändring av stabiliteten, eftersom där måste minst ett av egenvärdena  $\lambda_i$  blivit noll och bytt tecken. Detta går enkelt att se från beteendet av kurvan, då  $\frac{\partial \beta}{\partial E}$  uppenbarligen divergerar om någon av stabilitets parametrarna  $\lambda_i$  går genom noll och byter tecken, punkter som detta sker benämns *vändpunkter*. Alltså är det möjligt att, under dessa antaganden om mjukhet och ändlighet av några derivator, uttala sig om stabiliteten för en jämviktssekvens utan kännedom om den utökade entropifunktionen.

Två viktiga och uppenbara konsekvenser av detta är:

- Slutsats 1: Om en punkt längsmed en jämviktskurva har visats var helt stabil är alla punkter i samma jämviktssekvens också helt stabila tills den första vändpunkten träffas på, eftersom en förändring av stabiliteten endast kan ske där.

Nära vändpunkten kan ekvation 2.15 skrivas som:

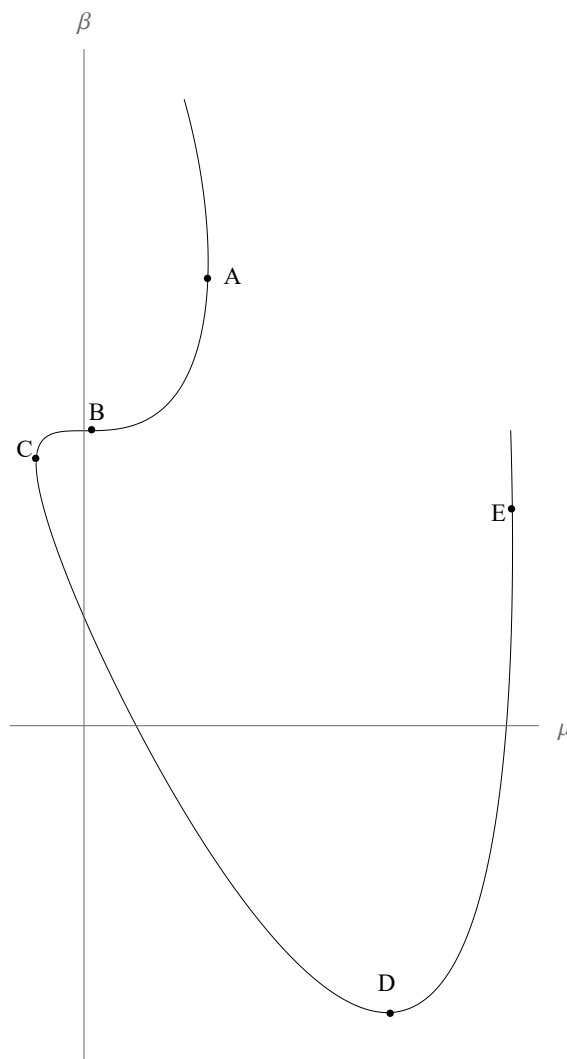
$$\frac{\partial \beta}{\partial E} \approx -\frac{(\partial_i \beta_{eq})^2}{\lambda_i} + \dots (\text{ändliga termer}) \quad (2.16)$$

- Slutsats 2: Vid en vändpunkt är grenen med negativ lutning nära vändpunkten alltid instabil.

Denna slutsats följer av att en negativ lutning nära vändpunkten betyder att minst en term i summan i 2.16 vara negativ, alltså att minst ett egenvärde är positivt.

### 2.3.3 Analys av stabilitet

Metoden som beskrevs ovan kan verka något oklar till en början därför följer här ett exempel på det hur ett konjugerat diagram kan se ut och vad man kan tolka från det.

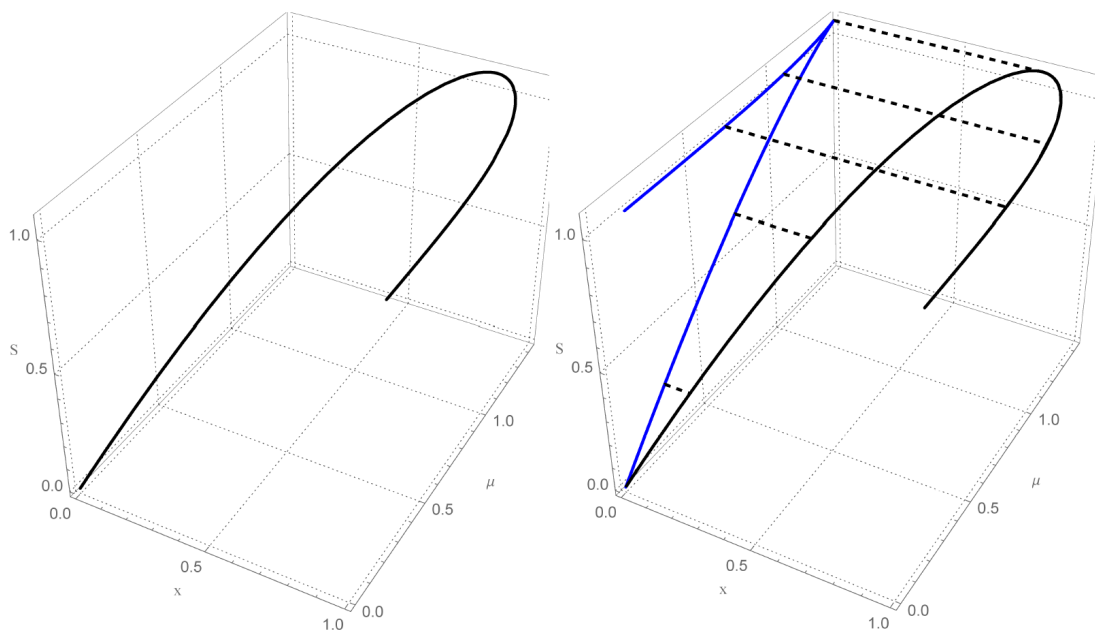


FIGUR 2.1: Generisk plott av en konjugerad variabel  $\beta$  mot en kontrollparameter  $\mu$  längs med en jämviktssekvens.

I figur 2.1 visas fem punkter där derivatan växlar tecken längs en godtycklig jämviktssekvens, men det är endast vid vändpunkterna A, C och E som en förändring av stabiliteten sker eftersom dessa samtidigt håller  $d\mu = 0$ . Eftersom maximeringen av entropin  $\mathcal{S}$  skall ske för fixt  $\mu$  och kurvan uppenbarligen skiftar längs kontrollparametern då den passerar B och D kan dessa inte ge någon förändring av stabiliteten och dessa horisontella tangenter är således inte några vändpunkter. Om nu A antas ha visats vara en stabil punkt i jämviktssekvensen förblir denna helt stabil ända fram till nästa vändpunkt C. Därefter

är jämvikten instabil, som en följd av den negativa lutningen, åtminstone fram till vändpunkten E. Dock är det inte klart vad som händer vid denna om man bara skulle ha den uppritade kurvan, vilket exemplifierar en viss begränsning i vändpunktsmetoden.

I de fallen man ej känner en explicit form för en jämviktskurva kan denna ändå ofta finnas numeriskt, genom att med datorhjälp lösa de statistiska jämviktsekvationerna. Vad detta resulterar i kan vara en parametriserad kurva av en, eller flera kontrollparametrar, och de tillhörande konfigurationsvariablerna. För enkelhetens skull betraktas situationen med en kontrollparameter  $\mu$  samt en generaliserad koordinat  $x$  för att detta går att illustrera på trevligt vis, inspirerat av Thompson [3].

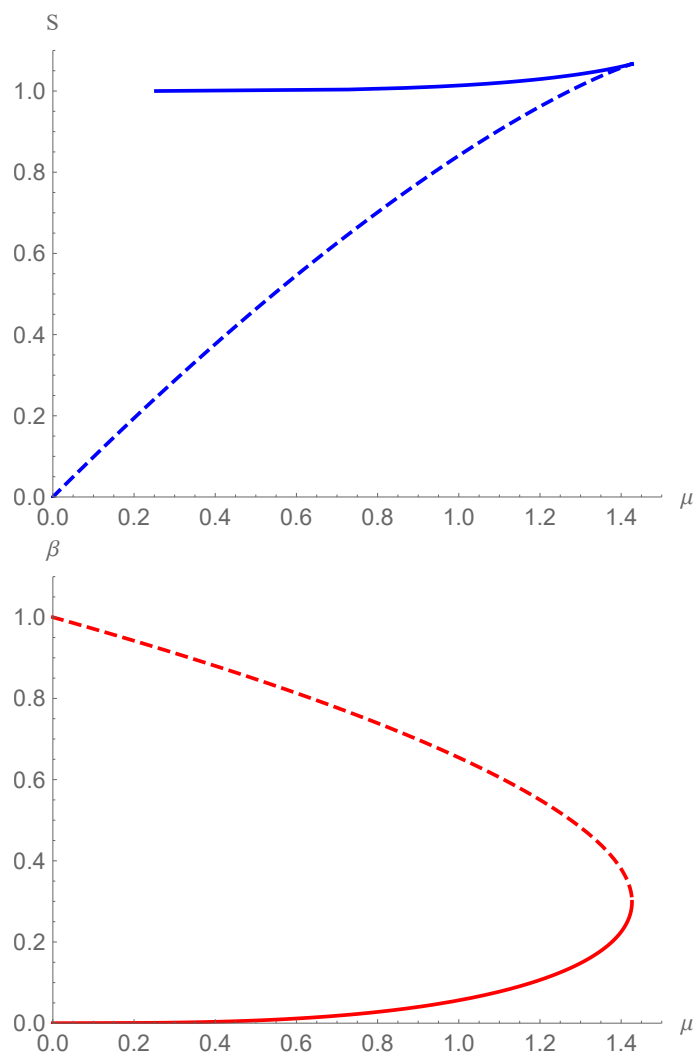


FIGUR 2.2: Generisk plott av en jämviktssekvens  $S_{eq}(x(\mu), \mu)$  till vänster, till höger visas samma kurva med dess projektion på  $S$ - $\mu$  planet.

I figur 2.2 ovan visas grafiskt hur kopplingen mellan en viss jämviktssekvens och dess projektion på  $S$ - $\mu$  planet kan göras. Varför man är intresserad av tillståndsfunktionen  $S$  plottat mot kontrollparametern  $\mu$  är ju för att det är precis denna kurva från vilken vi definierar den konjugerade parametern  $\beta$  från.

Överst i figur 2.3 visas beteendet av  $S$  längs med en jämviktssekvens som funktion av kontrollparametern  $\mu$  från vilken derivatan studeras i enlighet med vändpunktsmetoden. Från figuren identifieras vändpunkten med den horisontella tangenten i det tillhörande konjugerade diagrammet nedan i rött, för vilken derivatan blir diskontinuerlig och byter tecken vilket tydligt är vad som sker vid *kuspen* i blått i det tillhörande diagrammet ovan. Streckningen av en del av sekvensen har gjorts för att visa att denna del av jämvikten är instabil, eftersom det syns tydligt i det konjugerade diagrammet att denna förgrening har negativ lutning vilket enligt slutsats 2 i kapitel 2.3.2 relaterar till instabilitet. Vidare om någon punkt på den heldragna grenen skulle ha visats stabil, säg att det fanns en av de punkterna representerade ett globalt maximum för  $S$  vore hela sekvensen stabil fram till vändpunkten, enligt slutsats 1 i kapitel 2.3.2.

Vad som är exceptionellt med denna tillämpning av vändpunktsmetoden är att slutsatserna kan göras direkt från att enbart titta på formen av kurvorna, som i princip kan vara något man låtit hitta empiriskt eller numeriskt. Energiderivatet på  $\beta$  behöver inte



FIGUR 2.3: Projektionen på  $\mathcal{S}$ - $\mu$  planet ovan i blått från figur 2.2 samt det tillhörande konjugerade diagrammet, dvs  $\frac{\partial \mathcal{S}_{eq}}{\partial \mu} \equiv \beta$  nedan i rött.

ens explicit ritas ut då det är uppenbart från det konjugerade diagrammet att det endast finns en kritisk punkt, alltså en vändpunkt. I denna vänder kurvan och går bakåt igen vilket nödvändigtvis betyder att derivatan  $\frac{d\beta}{d\mu}$  har divergerat, se ekvation 2.15. Sådana här *kusper* är vanliga i sammanhangen av stabilitetsanalys och är ett exempel på ett förgreningsbeteende från någon viss kritisk punkt vilket är typiskt vad som sker från projektioner av kurvor i högre dimensioner ned på ett plan.

För att förtydliga situationen och dessa bilder ytterligare är det värt att notera att den delen av jämviktssekvensen som hör till den instabila grenen i det konjugerade diagrammet motsvarar ett lokalt minimum för den utökade potentialfunktionen  $\hat{\mathcal{S}}$  och den stabila motsvarar ett maximum för densamma. Vilket stämmer väl överens med vad vår intuitiva förståelse från postulatet om entropins maximerade, men detta har nu gjorts utan kännedom om den faktiska utökade  $\hat{\mathcal{S}}$ . Alltså i fallet med en kontrollparameter och en generaliserad variabel, utan att känna hela entropiytan. Även om den exakta formen av denna ej är känd kan Poincarés vändpunktsmetod dra slutsatser om dess kvalitativa beteende i närheten av en jämviktssekvens, som utlovat. Vidare tolkning av kurvans karaktär är att vändpunkten är punkten där det lokala minimat och maximat sammanfaller, detta undersöks i detalj i det fysikaliska systemet som betraktas i kapitel 3.

## 3 Svart hål i en låda

### 3.1 Den mikrokanoniska lådan

De antaganden som ligger för grund för denna analys är sambanden för energin och entropin i kapitel 1.2 samt att dessa antas vara additiva, vilket kan kritiseras men görs för enkelhetens skull samt för att modellen även används som en ren demonstration på en tillämpning av vändpunktsmetoden.

Situationen som föreställs är man har en *låda* av någon given volym  $V$  med väggar som inte tillåter någon form av energi att lämna lådan. Sedan tänks det att man ger lådan någon given mängd energi  $E$ , som tillåts att vara antingen i formen av svartkroppsstrålning, som massa i ett svart hål eller någon blandning av dessa. Startpunkten är lämpligen med lådan tom och gradvis kan dess energiinnehåll ökas och därmed energitätheten i lådan, sedan undersöks hur systemet beter sig för olika värden på kontrollparametern  $E$ . Vad som agerar som den generaliserade koordinaten blir  $M$ , det svarta hålets massa. Varför just en mikrokanonisk ensemble bör väljas för detta system klargörs i kapitel 3.4.

Vad som utmärker situationen med denna mikrokanoniska ensemble är att den utökade entropifunktionen  $\hat{S}$  under de givna antagandena existerar för hela konfigurationsrummet. Detta gör analysen med vändpunktsmetoden extra klar och tydlig, även om denna såklart hade fungerat endast med kännedomen om en eventuell jämviktssekvens.

De precisa detaljerna om fördelningen av energin är inte allt för relevanta utan strålningen antas vara någorlunda homogent fördelad i lådans volym. Vidare är värt att notera att det endast kan vara ett svart hål i lådan, eftersom om flera skulle finnas skulle dessa kunna skicka ut gravitationsstrålning och således skulle inte lådans energiinnehåll kunna hållas konstant.

### 3.2 Stabilitetsanalys

När de två fysikaliska modellerna är framlagda och valet av ensemble har gjorts kan stabilitetsanalysen påbörjas och grunden för denna är som bekant entropifunktionen:

$$\hat{S}(M; E) = 4\pi M^2 + \frac{4}{3}(aV)^{1/4}(E - M)^{3/4} \quad (3.1)$$

Där  $M$  är det svarta hålets massa som här agerar som den okontrollerade variabeln och den totala energin  $E$  som agerar kontrollparameter. Denna funktion för den utökade entropifunktionen följer av sambanden och antagandet om additivitet:

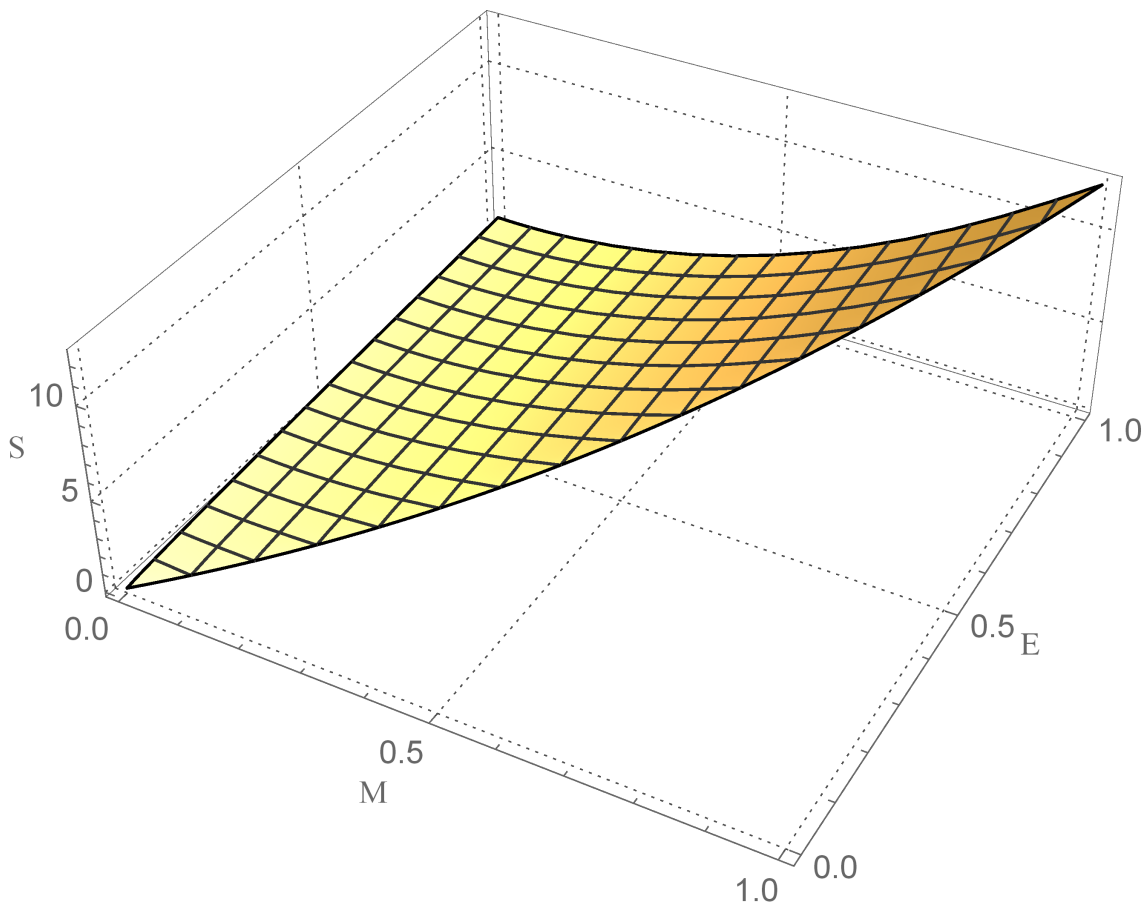
$$E_{tot} = E_{sh} + E_{sk} = M + aVT^4 \quad (3.2)$$

$$S_{tot} = S_{sh} + S_{sk} = 4\pi M^2 + \frac{4}{3}aVT^3 \quad (3.3)$$

För att göra räkningarna snyggare sätts härefter  $aV = 1$ , vilket effektivt bara specificerar någon given volym för lådan då  $a = \frac{1}{15}\pi^2$  som tidigare. Med detta blir ytan som ska undersökas:

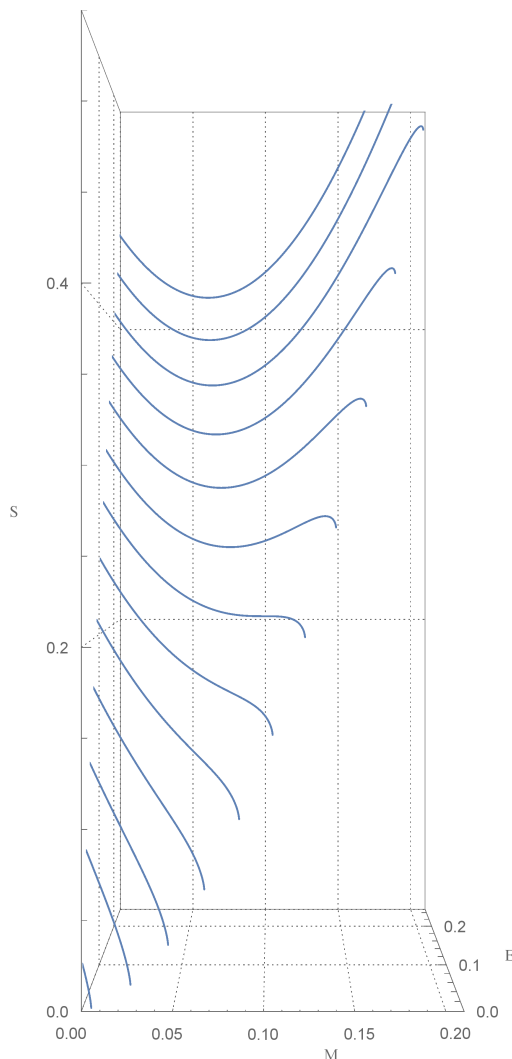
$$\hat{S}(M; E) = 4\pi M^2 + \frac{4}{3}(E - M)^{3/4} \quad (3.4)$$

Vilken med tekniska hjälpmedel enkelt kan plottas i något givet intervall som exempelvis följande:



FIGUR 3.1: Den utökade entropifunktionen  $\hat{S}(M; E)$  3.4 för det svarta hålet i lådan.

Från denna yta är det inte helt enkelt att se om det finns någon sekvens med lokala entropimaxima och de förväntade tillhörande miniman. Vad som går att tyda är att det finns globala maximan nära gränsen  $M = E$  för högre energitätheter (större fixt  $E$ ). En noggrannare undersökning måste dock göras med en början för låga energitätheter dvs. små  $E$ . Vad som tydligare illustrerar beteendet av en mikrokanonisk ensemble är att studera snitt av entropiytan för fixa  $E$  vilket visas i figur 3.2.



FIGUR 3.2: Snitt av den utökade entropifunktionen  $\hat{S}(M; E)$  från ekv. 3.4 som visas i figur 3.1 för olika fixa  $E$  i regelbundna steg.

För snitt med mycket små  $E$  alltså för låga energitätheter synes inga lokala extrempunkter för kurvan som bildas från snittet av den utökade entropiytan  $\hat{S}$ . Tydligt är även att maximum för entropin för dessa energitätheter ligger vid  $M = 0$  vilket skulle betyda att det inte fanns något svart hål i lådan utan att den var fylld med endast termisk strålning. Men för högre energitätheter börjar get gå att tyda ett lokalt minima och ett lokalt maxima för varje snitt efter det sjunde i figuren 3.2, dessa är vad som är av mycket stort intresse att undersöka. Eftersom de kurvorna har punkter för vilka  $dM = 0$  för fixt  $E$  och dessa punkter är vad som bildar vår eftertraktade jämviktssekvens.

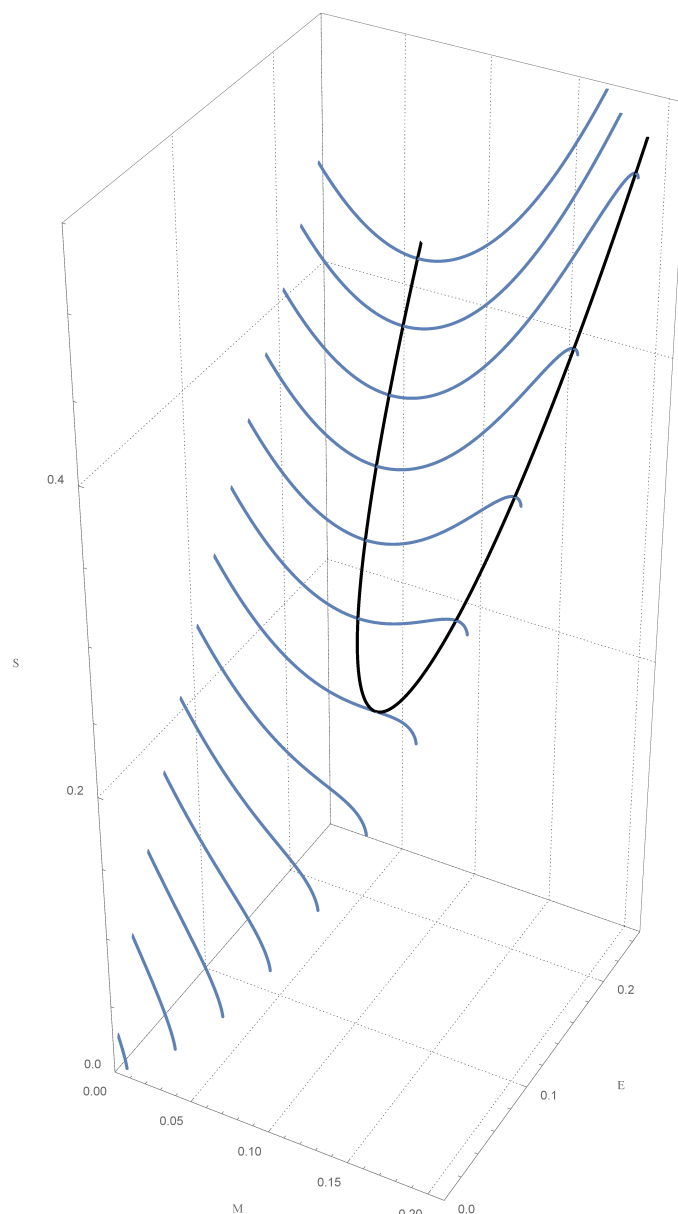
Man kunde även börjat med att söka efter stationära punkter med avseende på  $M$ , fast det är samtidigt bra att figuren 3.2 i åtanke för att förstå hur situationen uppstår och betar sig mer intuitivt. Vad som eftersöks är lösningar till ekvationen  $\frac{\partial \hat{S}}{\partial M} = 0$ . Som för systemet i fråga tar formen:

$$8\pi M - (E - M)^{-1/4} = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow E_{eq} = E(M) = \frac{1 + 4096\pi^4 M^5}{4096\pi^4 M^4} \quad (3.6)$$

Vilket ger oss en parametrisering av jämviktssekvensen  $\mathcal{S}_{eq} = \hat{S}(M_{eq}(E); E)$ . Denna kan lämpligen ritas upp med snitten som visades i figur 3.2.



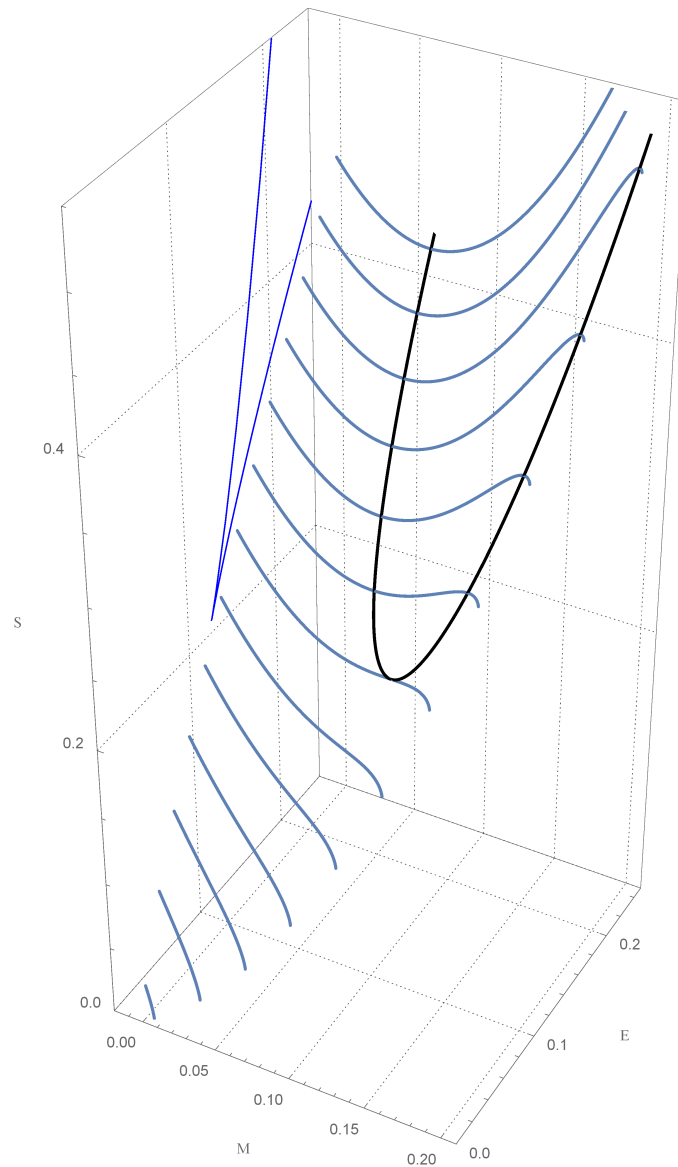


FIGUR 3.3: Snitten av entropiytan från figur 3.2 samt jämviktssekvensen från ekv. 3.6 som kurvan i svart.

Jämviktssekvensen i svart visar alltså hur de lokala maxima och miniman som syntes för snitten knyts ihop och även punkten där de sammanfaller, vilket i sammanhanget blir lämpligare att tänka på som en kritisk energitäthet för vilken jämviktssekvensen börjar. Alltså är det först vid denna energi som innehållet i lådan kan ändras från att ha varit endast ren strålning. I appendix A visas att vid denna kritiska energitäthet skulle det svarta hålet då ha 80% av den totala energin och resten vore i form av strålning.

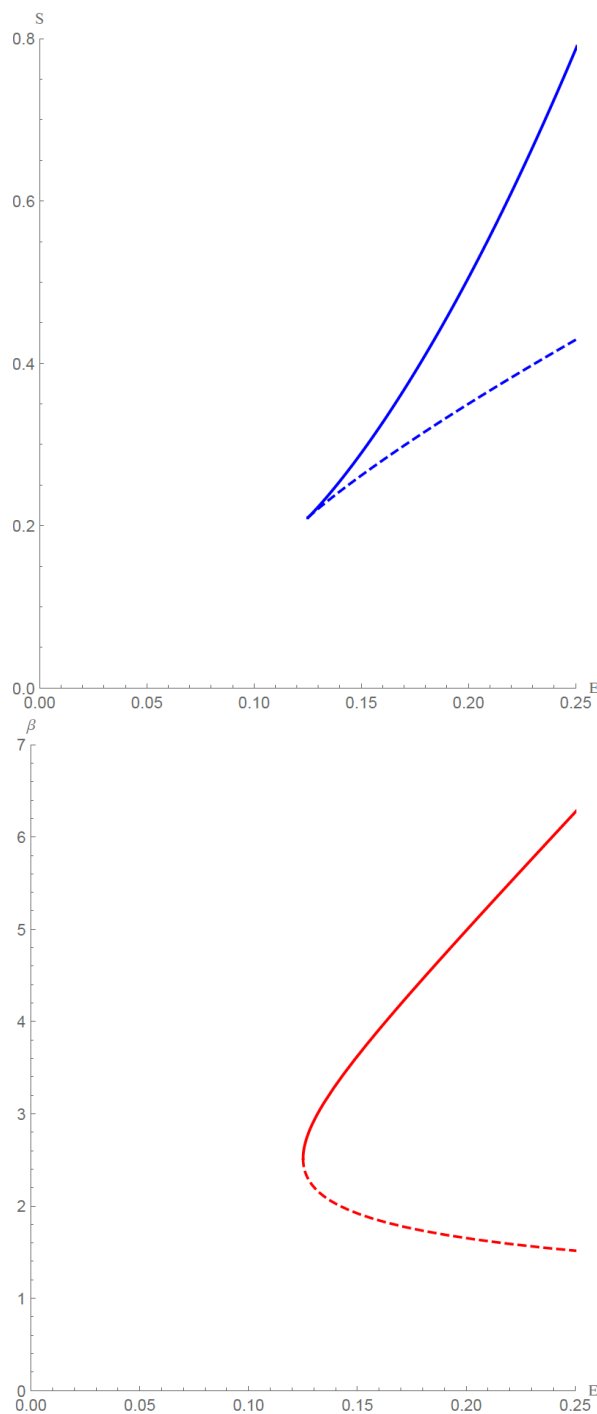
Eftersom en jämviktssekvens faktiskt visats existera kan vändpunktsmetoden tillämpas på denna för att undersöka dess stabilitet. Först kan man fråga sig om det finns någon punkt på jämviktssekvensen som är globalt maximum, vilket skulle betyda att i alla fall den punkten motsvarade en stabil konfiguration med ett blandat energiinnehåll i lådan. Detta kan avläsas från figur 3.2 att det bland snitten för högre energitätheter är att det lokala maximumat nära  $M = E$ -gränsen faktiskt antar högre värden än  $\mathcal{S}_{eq}(M; 0)$  och därmed även globalt maximerar entropin för den givna energin. Punkten då dessa antar samma värde motsvarar  $M \approx 0.977E$ , se appendix A, vilket var resultatet från analysen i [1].

En lämplig startpunkt för den fullständiga analysen av stabiliteten för hela jämviktssekvensen är att kolla på projektionen av jämviktskurvan mot kontrollparametern  $E$ .



FIGUR 3.4: Snitten av entropiytan från figur 3.2 samt jämviktssekvensen från ekv. 3.6 i svart och dess tillhörande projektion i blått på  $S$ - $E$  planet.

Vad som ses är att jämviktskurvans projektion mot  $S$ - $E$  planet har formen av en kusp. Analysen av denna blir helt analog till det generiska exemplet i 2.3.3 och följer nedan, för samma del av jämviktssekvensen som tidigare för projektionen och dess tillhörande energiderivata  $\beta$ , alltså vad som tidigare kallades det konjugerade diagrammet.



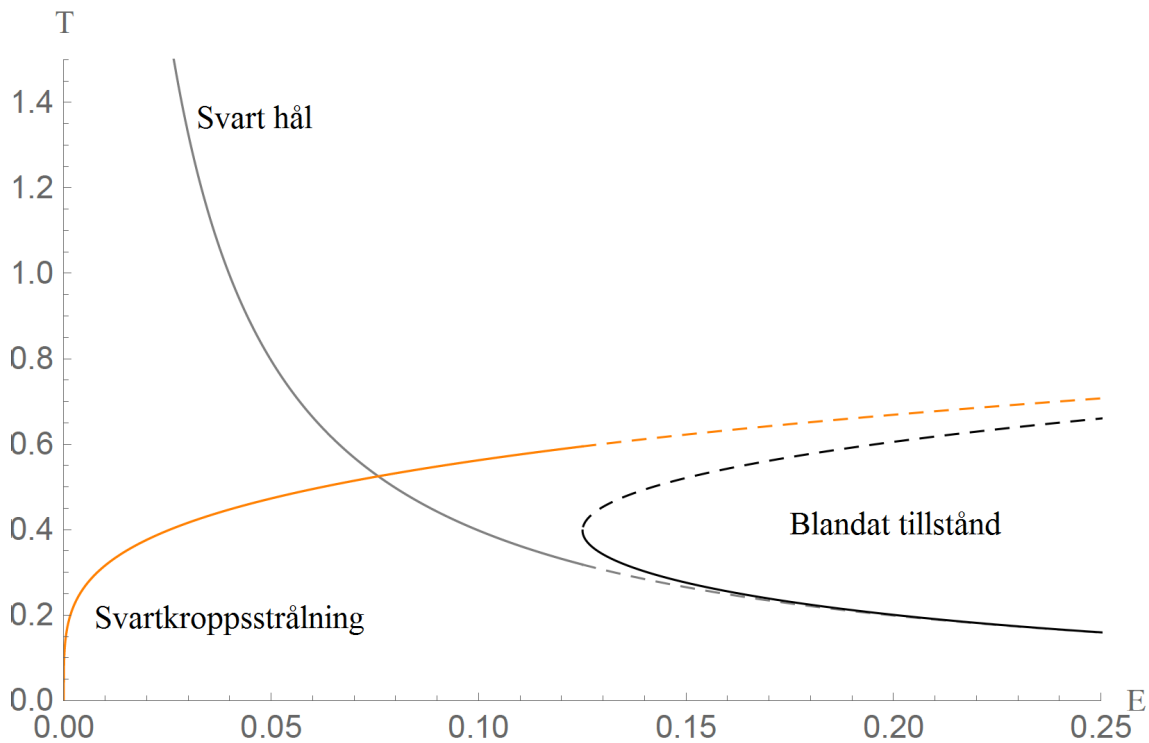
FIGUR 3.5: Kuspen från figur 3.4 ovan i blått samt dess tillhörande energiderivata  $\beta$  i det konjugerade diagrammet nedan i rött.

Helt analogt med beskrivningen av metoden i kap 2.3.3 syns tydligt en vändpunkt från vilken det går två grenar som relaterar till sekvenserna som är lokala minima respektive maxima. Grenen som har negativ lutning i det konjugerade diagrammet visas som streckad eftersom denna är instabil enligt slutsats 2 i kapitel 2.3.2. När man sedan undersöker vilken del av jämviktssekvensen som denna motsvarar är det mycket riktigt de lokala miniman. Vidare motsvarar den heldragna grenen de lokala maximan och denna sekvens kan sägas vara helt stabil enligt slutsats 1 kapitel 2.3.2, eftersom vi nyss konstaterade att minst en punkt på sekvensen efter vändpunkten var stabil.

### 3.3 Temperatur och värmekapacitet

Analysen av systemet är ännu inte färdig då flera slutsatser kan finnas efter en noggrannare studie. Dessa har att göra med beteendet av systemet och dess beståndsdelars temperaturbeteende. Utgående från det grundläggande sambandet kan temperaturen definieras:

$$dU = TdS - PdV \Rightarrow \frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V \quad (3.7)$$



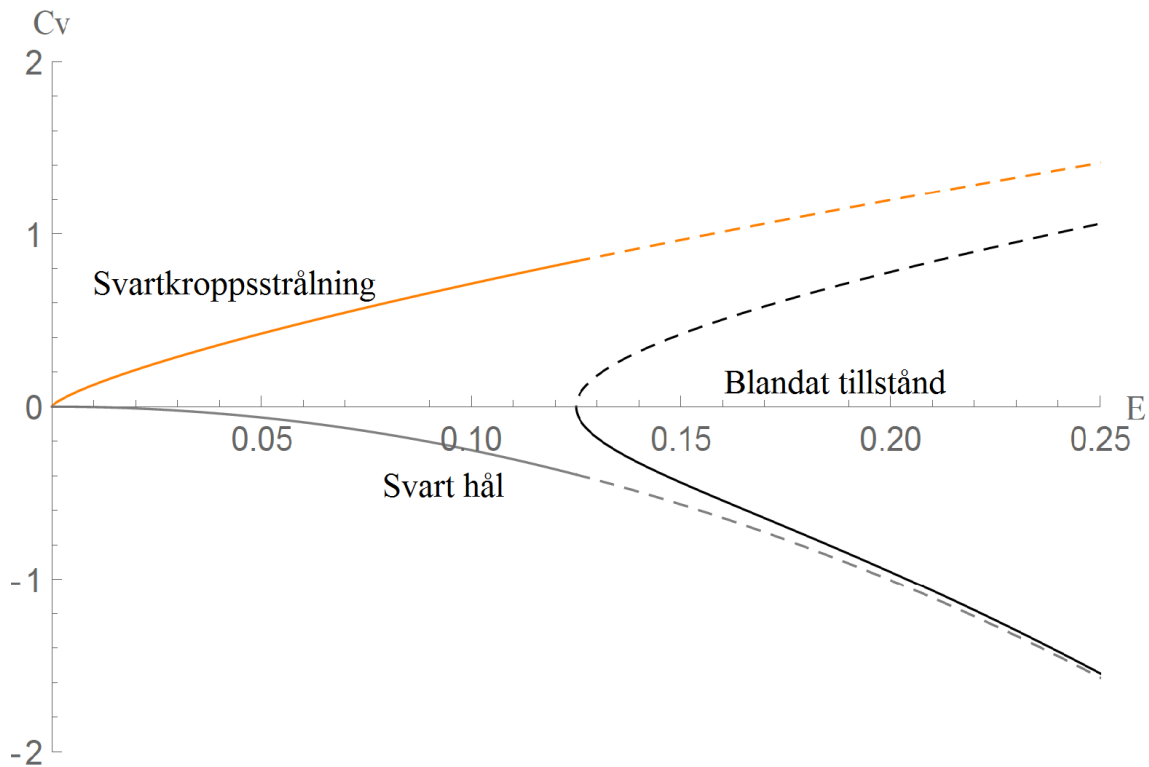
FIGUR 3.6: För samma spann av energier som tidigare plottas temperaturen mot energin för ren svartkroppsstrålning i orange, ett svart hål i grått och jämviktssekvensen för lådan i svart.

Ovan synes temperaturkurvan för olika fixa energier med de olika alternativen av innehåll i lådan; endast svartkroppsstrålning i orange, endast ett svart hål i grått och den svarta kurvan motsvarar jämviktssekvensen från ekv. 3.6 med en blandning av de båda. Kurvan för svartkroppsstrålningen är typiskt vad man är van att se, temperaturen ökar när energin ökar. Tvärtom beter sig kurvan för det svarta hålets temperatur, vilken minskar då energiinnehållet ökar och har därmed uppvisar *negativ värmekapacitet*. Jämviktssekvensens vändpunkt ses även här och därför har den grenen som motsvarar instabila lägen streckats. Från samma värde för energitätheten streckas de två rena temperaturfunktionerna som referenser, mot vilka de två respektive grenarna av jämviktssekvensen går mot. Vilket stämmer överens med vad som är förväntat beteende av systemet i gränserna då strålningen eller det svarta hålet dominerar.

Låt oss nu studera värmekapaciteten för de olika systemen och deras sammansättning i mer detalj, utgående från definitionen av värmekapacitet vid konstant volym eftersom vi fortfarande betraktar en mikrokanoniska ensemble:

$$C_v \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (3.8)$$

Vilket från de givna uttrycken i kapitel 1.2 för entropin och energin för de rena systemen, samt för jämviktssekvensen ur ekvation 3.4 ger följande kurvor:



FIGUR 3.7: För samma spann av energier som tidigare plottas värmekapaciteten  $C_V$  mot energin för ren svartkroppsstrålning i orange, ett svart hål i grått och jämviktssekvensen i svart.

Vid betraktande av figur 3.7 i förhållande till figur 3.6 är det viktigt att ha i åtanke att temperaturen för det svarta hålet relaterar till inversen av dess energi,  $T_{bh} = 1/(8\pi M)$ .

### 3.4 Slutsatser och generalisering av resultaten

Nedan följer en härledning av kravet för stabilitet mellan två system med olika tecken på värmekapaciteten, som går att hitta i exempelvis [10]. För två system med energierna  $U_1$ ,  $U_2$  samt parametrarna  $X_1$ ,  $X_2$  antag nu att deras totala energi ges av  $U = U_1 + U_2$  samt att deras entropi är additiv enligt:

$$S = S(U_1) = S_1(U_1, X_1) + S_2(U - U_1, X_2) \quad (3.9)$$

Vilket för jämviktssekvenser bevarar  $dX_i = 0$  och därmed tas den sammansatta entropifunktionen här att bero på endast en variabel  $U_1$ . För extremum av denna eftersöks som bekant:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U_1} \right)_{U_2, X_1, X_2} = 0 \quad (3.10)$$

Vilket eftersom  $\frac{dU_2}{dU_1} = -1$  ger sambandet:

$$\left( \frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right)_{X_1} - \left( \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \right)_{X_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \quad (3.11)$$

Vilket om temperaturen antogs positiv självfallet ger oss att  $T_1 = T_2 = T$  vid jämvikt och som vanligt för att undersöka karaktären av denna jämvikt undersöks tecknet på andraderivatans som för maxima av  $\mathcal{S}$  ska vara negativ:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial U_1^2}\right)_{U_2, X_1, X_2} < 0 \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{T_1^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial U_1}\right) + \frac{1}{T_2^2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial U_2}\right) = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) < 0 \quad (3.13)$$

Där  $C_1$  och  $C_2$  är de två systemens respektive värmekapaciteter vid konstant volym och kravet för *stabil* jämvikt blir således:

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) > 0 \quad (3.14)$$

Vilket trivialt är uppfyllt för två system med positiv värmekapacitet, vilket är betryggande. Något anmärkningsvärt är att från denna korta räkning kan det dras slutsatsen att två system med *negativ* värmekapacitet aldrig kan vara i en stabil jämvikt.

Vad som kvarstår att fråga är nu hur situationen för  $C_1 < 0$  och  $C_2 > 0$  blir. Från kravet 3.14 leds vi nu till slutsatsen att situationen mellan systemen med olika tecken på värmekapaciteten är stabil om och endast om:

$$|C_1| > C_2 \quad \Rightarrow \quad C \equiv C_1 + C_2 < 0 \quad (3.15)$$

Vilket för positiva temperaturer och additiv värmekapacitet för systemet betyder att den totala värmekapaciteten måste vara negativ för att ett stabilt jämviktsläge ska kunna finnas mellan ett system med positiv och negativ värmekapacitet, detta är det huvudsakliga resultatet i detta arbete.

Vad som vidare är mycket enkelt och intressant att konstatera är att om en kanonisk eller storkanonisk ensemble skulle betraktas istället med det svarta hålet, eller andra system med negativ värmekapacitet, är att då skulle ingen stabil jämvikt kunna finnas. Eftersom värmebadet som dessa vore i kontakt med då tänks ha godtyckligt stor positiv värmekapacitet i dessa modeller vilket gör att 3.15 ej kan uppfyllas. Detta är anledningen till att den mikrokanoniska ensemblen måste väljas då man betraktar sammansättningar där den ena komponenten har negativ värmekapacitet.

Detta visar även på en klar situation där de olika ensemblerna inte är helt ekvivalenta, detta har att göra med att entropin i fallet med system med negativ värmekapacitet inte längre är en konvex funktion. Alltså kan man inte utföra den vanliga Legendre transformationen till de andra ensemblerna.

Denna allmänna härledning av stabilitetskravet kan nu ge oss ett ytterligare sätt att se på problemet med det svarta hålet i lådan. Med figur 3.7 framför sig går situationen att beskrivas och förklaras i ord på följande vis.

För låga energier kommer lådan innehålla endast svartkroppsstrålning vilket är rimligt eftersom det är den maximala entropikonfigurationen av instängda elektromagnetiska fält. När sedan mer energi tillförs ökar temperaturen som för normala system med positiv värmekapacitet. Men för en kritisk energitäthet då  $M = 0.8E$ , som precis motsvarar vändpunkten, minskar temperaturen abrupt då ett svart hål bildas. Samtidigt gör även  $C_V$ -kurvan ett hopp och hamnar på negativa värden. Denna gren av jämviktssekvensen är då stabil enligt kravet 3.15. På motsvarande sätt är den andra grenen för vilken det

blandade systemet med både strålning och svart hål instabil eftersom där är den totala värmekapaciteten positiv, denna situation skulle då betyda att strålningen dominerade.

Detta kvalitativa beteende av lådans energiinnehåll kan förstås genom följande resonemang. Antag att situationen vore så att för någon given energitäthet över den kritiska att det finns ett svart hål och en viss mängd strålning. Om det svarta hålet hade en högre temperatur till en början skulle energi flöda från detta till strålningen som då skulle öka sin temperatur. Men samtidigt ökar även det svarta hålets temperatur då dess massa minskar, situationen kommer kunna stabiliseras om denna ökning av temperaturen är mindre än den för strålningen och energiflödet skulle då bromsas in. Vilket går att tyda från figur 3.7 och motsvarar alltså kravet 3.15. Om situationen vore omvänd att strålningen till en början hade en högre temperatur skulle energi flöda till det svarta hålet och då skulle båda temperaturerna gå ned, fast eftersom minskningen av det svarta hålets temperatur vore större kan ingen stabil jämvikt infinna sig. Då temperaturen för det svarta hålet tillslut skulle nå noll och för vilket det svarta hålet helt skulle evaporerat, vilket är precis vad som kan ses från den instabila grenen i figur 3.7.

Då det svarta hålet i lådan bildas kan liknas med en sorts fasövergång som beskrivet i [1], exempelvis då en vattendroppe kondenserar ut från vattenånga. Till en början finns endast vattenånga men vid en kritisk punkt blir luften mättad och en fasövergång sker och vattendroppar kan bildas samtidigt som den resulterade vattenångan då minskar sin mättnadsgrad. Vidare är det även möjligt att försiktigt tvinga vattenångan över den kritiska punkten utan ångan tillåts kondensera, det är alltså i en sorts supermättat tillstånd. Detta är dock som bekant ett instabilt läge och en liten fluktuation får systemet att drastiskt ändras då vattnet börjar kondenseras. Detta blir analogt med situationen med det svarta hålet i lådan där det inte är helt orimligt att se det som att svarta hål naturligt kan kondensera ut från svartkroppsstrålning av tillräckligt hög energitäthet.

En vidare och mer allmän studie av eventuella kopplingar mellan negativ värmekapacitet i den mikrokanoniska ensemblen och en fasövergång i motsvarande kanonisk ensemble går att göra, se [11]. Detta är dock utanför omfattningen av detta arbete som fokuserar på system i mikrokanonisk ensemble. För en djupare analys med denna utgångspunkt se gärna Penrose diskussioner i [12].

## 4 Andra system med negativ värmekapacitet

### 4.1 Negativ vattenkapacitet - en liknelse

En mycket trevlig analog till system med negativ värmekapacitet kan göras i enlighet med Lynden-Bell [13], detta för att hjälpa med intuitionen för system av denna karaktär. Liknelsen är mellan ett termodynamiskt system i en mikrokanonisk ensemble och en behållare med vatten, där kopplingarna värme-vatten och temperatur-vattennivå görs. På motsvarande sätt som mängden värme som behövs för att öka temperaturen definierar värmekapaciteten definieras här analogt mängden vatten som krävs för att öka den absoluta vattennivån behållarens *vattenkapacitet*.

När vatten hålls i en behållare ökar vanligtvis vattennivån, på motsvarande sätt som i princip alla vardagliga system har positiv värmekapacitet. Men i likhet då självgraviterande system betraktas i termodynamiken kan situationer uppstå när systemet i fråga beter sig på omvänt sätt. Detta exempelvis om en hink hängs upp i en fjäder, när vatten hålls i denna dras fjädern ut och trots att vattennivån relativt hinken går upp kan den absoluta vattennivån falla vilket då skulle motsvara ett system med negativ vattenkapacitet. Alltså om du håller i mer vatten sjunker den absoluta vattennivån, analogt med hur temperaturen av ett svart hål minskar då mer energi tillförs till detta.

Detta är något som enkelt går att konstruera och kan hjälpa med förståelsen av den allmänna diskussionen i kapitel 3.4, eftersom denna går att tillämpa på detta analoga system. Motsvarigheten till en kanonisk ensemble med vattenhinken är om denna kopplas till exempelvis en stor sjö, alltså något med mycket stor positiv vattenkapacitet. Om detta görs och om hinken i fjädern till en början har en lägre vattennivå, analogt till temperatur, kommer nivån sjunka ytterligare tills allt vatten fyllts över i sjön och alltså fanns inget jämviktsläge från denna utgångspunkt. Inte heller om vattennivån i hinken med negativ vattenkapacitet var högre till en början vore detta möjligt, eftersom då skulle denna bara öka och bli ännu högre och då röra sig från jämviktsläget som naturligtvis är att de två behållarna med vatten har samma vattennivå, motsvarande samma temperatur i termiskjämvikt. Vidare om två hinkar med negativ vattenkapacitet kopplas ihop kan inte heller något stabilt läge uppnås.

Men om hinken i fjädern kopplas till en vanlig behållare med liten positiv vattenkapacitet, till beloppet mindre än hinkens, så att den totala vattenkapaciteten är negativ kommer båda röra sig uppåt eller nedåt mot ett stabilt jämviktsläge helt analogt det svarta hålet i lådan som analyserades i detalj i kapitel 3.

Dessa försök är något som enkelt kan utföras och läsaren rekommenderas att göra detta, då författaren fann det mycket upplysande att se framför sig detta smått ovanliga dynamiska beteende.



## 4.2 Självgraviterade system i allmänhet

För ett isolerat system av  $N$  partiklar som låts växelverka endast via deras ömsesidiga gravitation får *virial teoremet*, som relaterar medelvärden av homogena funktioner, följande form.

$$\langle 2\mathcal{T} + \mathcal{V} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle E \rangle = \langle \mathcal{T} + \mathcal{V} \rangle = -\langle \mathcal{T} \rangle \leq 0 \quad (4.1)$$

Där  $\mathcal{T}$  är den totala kinetiska energin för samlingen av partiklarna,  $\mathcal{V}$  är den Newtonska gravitations potentialen och  $E$  är den totala energin för systemet [14].

Om modellen för en ideal gas används för den kinetiska energi  $\mathcal{T} = \frac{3}{2}NT$  ges systemets värmekapacitet av:

$$C_V \equiv \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = -\frac{3}{2}N \quad (4.2)$$

Vilket alltså betyder att sådana system alltid har negativ värmekapacitet vilket följer logiken att om mer energi skulle tillföras systemet minskar den kinetiska temperaturen som här kan ses vara ett mått på den genomsnittliga rörelsen av partiklarna.

Alltså skulle en naiv slutsats vara att självgraviterande system inte kunna vara stabila i sammansättningar med varandra. Men detta är farligt då antagandena för virial teoremet inte är helt triviala, därför är det lämpligt att göra en noggrannare analys av system av denna karaktär vilket följer nedan.

## 4.3 Partiklar i en sfär

En mer sofistikerad och detaljerad modell av partiklar som tillåts interagera under sin egen gravitation presenteras här och följer nära beskrivningen av Lynden-Bell [13][15]. Man utgår istället från att tänka sig att de  $N$  partiklarna med energi  $E$  är instängda i en sfärisk behållare med radie  $r$ , igen väljs alltså en mikrokanonisk ensemble. Problemet blir nu från statistisk mekanisk synpunkt en fråga om att maximera antalet sätt  $\Omega$  som de  $n_j$  partiklarna kan placeras i den  $j$ :te cellen av fasrummet under begränsningarna att antalet partiklar är fixt  $\sum_j n_j = N$  för någon total energi  $E$ . Alltså är utgångspunkten en rent kombinatorisk som för detta systemet tar formen:

$$\Omega = \frac{N!}{\prod n_j!} \quad (4.3)$$

Om cellerna sedan tänks ha enhetsvolym motsvarar  $n_j$  värdena av fördelningsfunktionen  $f$  i de olika fasrumscellerna. Det är denna fördelningsfunktion  $f$  som eftersöks som lösning av problemet eftersom denna specificerar fördelningen av partiklarna och deras hastigheter i sfären. Från detta bestäms systemets energi och i förlängningen även värmekapaciteten som tidigare setts kunna användas för att analysera systemets stabilitet.

Om logaritmen tas av multipliciteten  $\Omega$  och Stirlings approximation  $\ln(n!) \approx n \ln(n) - n$  nyttjas fås följande:

$$\ln(\Omega) = \ln \left( \frac{N!}{\prod n_j!} \right) = N(\ln(N) - 1) - \sum_j n_j(\ln(n_j) - 1) \quad (4.4)$$

Om sedan villkoret av totala antalet partiklar används och omskrivningen med fördelningsfunktionen utförs erhålls följande:

$$\ln(\Omega) = N \ln(N) - \int f \ln f d^6\tau \quad (4.5)$$

Där  $d^6\tau = d^3x d^3v$  motsvarar en integral av en given fasrumsvolym. Detta betyder alltså att maximera antalet konfigurationer i fasrummet ekvivalent med att maximera entropin  $S = - \int f \ln f d^6\tau$  eftersom  $N$  antas konstant. Detta kan göras med hjälp av *Lagrangemultiplikatorer* och formuleras då som följande:

$$\text{Maximera: } S = - \int f \ln f d^6\tau \quad (4.6)$$

$$\text{Under de två bivillkoren: } \sum_j n_j = N \quad (4.7)$$

$$E = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} \int f \mathbf{v}^2 d^6\tau - \frac{1}{2} \int \int \frac{f f'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^6\tau d^6\tau' \quad (4.8)$$

Där den första termen i energin är den kinetiska energin och den andra den Newtonska gravitationspotentialen båda uttryckta i den hittills okända fördelningsfunktionen  $f$ . Variationsproblemet blir alltså följande, där  $\delta S = \delta f \frac{\delta S}{\delta f}$  och  $\alpha$  och  $\beta$  är lagrangemultiplikatorerna.

$$\delta \mathcal{S} = \delta S + \alpha \delta N + \beta \delta E \quad (4.9)$$

$$\delta \mathcal{S} = - \int \delta f (\ln f + 1) d^6\tau \quad (4.10)$$

$$\delta N = \int \delta f d^6\tau \quad (4.11)$$

$$\delta E = \frac{1}{2} \int \delta f \mathbf{v}^2 d^6\tau - \int \int \delta f \frac{f'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^6\tau d^6\tau' \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{S} = \int \delta f \left( -\ln f - 1 + \alpha + \beta \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \int \frac{f'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^6\tau' \right) \right) d^6\tau \quad (4.13)$$

Om sedan följande omskrivning för gravitations potentialen  $\Psi(\mathbf{r}) = \int \frac{f'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^6\tau'$  används blir lösningen till variationsproblemet på formen:

$$-\ln f - 1 + \alpha + \beta \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Psi(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow f = e^{1 - \alpha - \beta \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Psi(\mathbf{r}) \right)} \quad (4.15)$$

Det verkar här som att vi funnit lösningen till problemet, men man ska inte glömma att  $\Psi(\mathbf{r})$  också var uttryckt som en integral av  $f$ . Men genom att nyttja differentialformen av Gauss lag för gravitationen, ges en Poisson ekvation som måste gälla:

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (4.16)$$

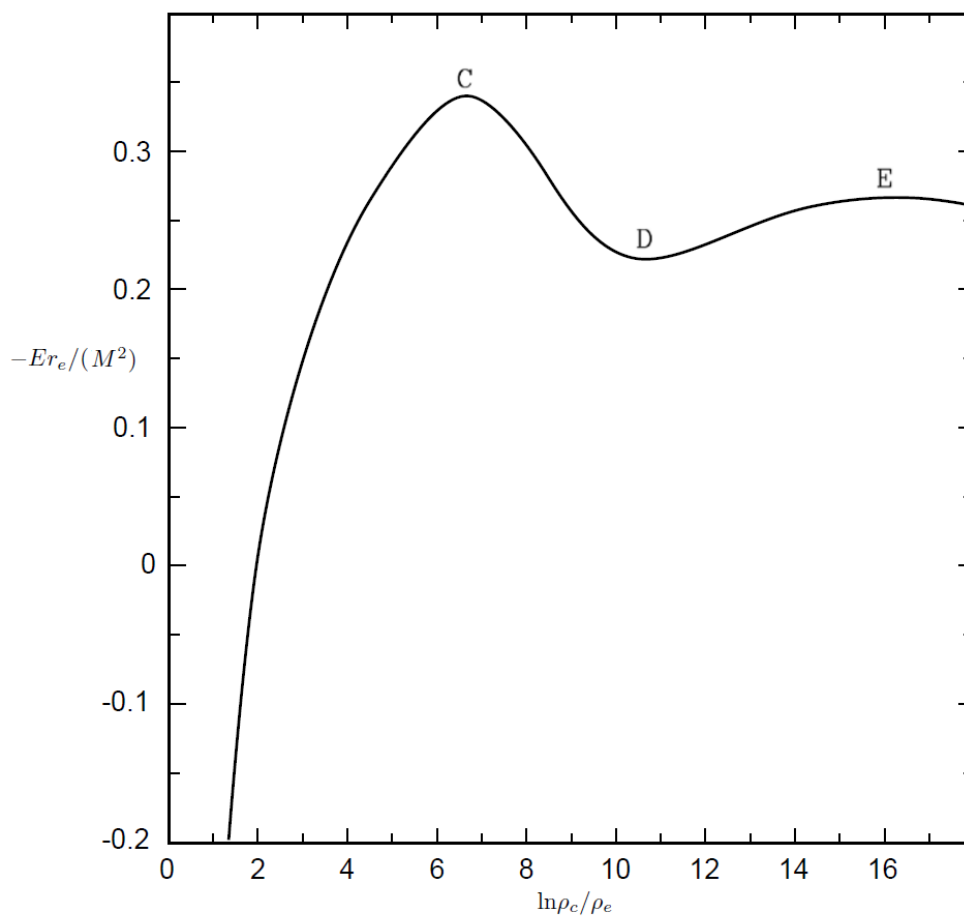
Vilken tar följande form för sfäriskt symmetriska lösningar som är aktuella här:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (4.17)$$

Eftersom tätheten  $\rho(\mathbf{r})$  kan finnas från uttrycket 4.15 går lösningen till problemet att finna från denna ordinära differential ekvation 4.17 som kan lösas numeriskt. Detta kommer ej göras här utan resultaten som fås om denna utförs kommer presenteras i följande kapitel och dessa är hämtade från [11] samt [16]. Vidare kan poängteras att denna presentation av den s k *isotermiska sfären* var mycket sammanfattad och skissartad, detta för att de fullständiga räkningarna som går att finna i t.ex. [15] är mycket långa och involverade. Detta kapitel bör ses mer som en sorts troliggörande för problemsituationen, och sedan från denna se vilka slutsatser som går att erhålla.

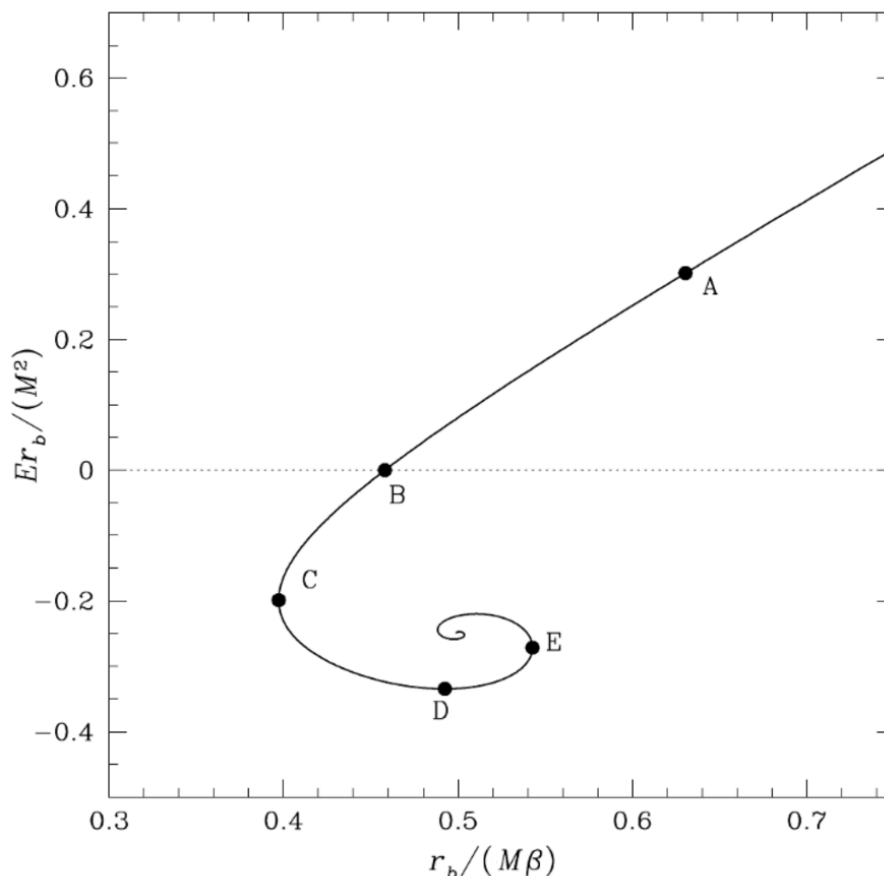
### 4.3.1 Stabilitetsanalys

Från den fullständiga analysen av den isotermiska sfären i [11] visar det sig att det är praktiskt att studera hur sfärens innehåll beror på dess *täthetskontrast*  $\rho_c/\rho_e$ , alltså förhållandet mellan tätheten i centrum och längs randen. Denna finner man från fördelningsfunktionen  $f$  i ekv. 4.15, efter de nödvändiga numeriska räkningarna.



FIGUR 4.1: Den dimensionslösa energin plottat mot logaritmen av täthetskontrasten. Figuren är tagen från Lynden-Bell i [11] s.14 och visas något modifierad här.

Det man finner från detta är en jämviktskurva som visas ovan i figur 4.1 och det visar sig lämpligt att illustrera denna som en plott av täthetskontrasten, som fås ur  $f$ , mot den dimensionslösa bindningsenergin  $-Er_e/M^2$ . Vad som visas är jämviktssekvensen för systemet för någon fix radie  $r_e$ , men ur endast denna figur är det svårt att dra slutsatser om stabiliteten för olika delar av jämvikten.



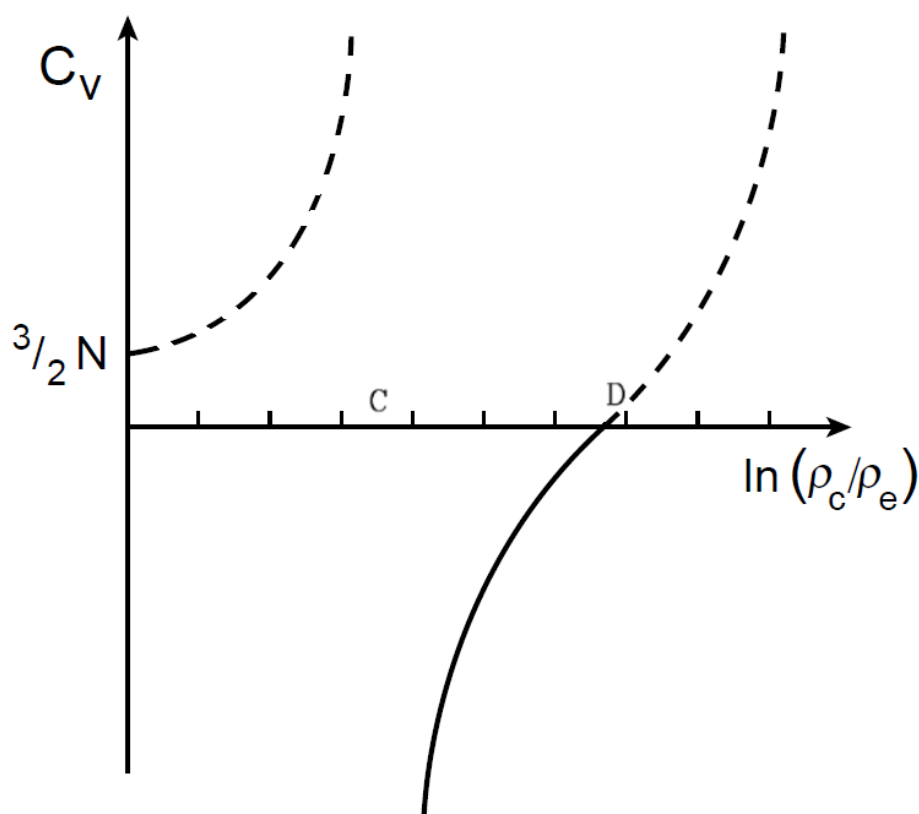
FIGUR 4.2: Den dimensionslösa energin plottat mot den dimensionslösa temperaturen. Figuren är hämtad ur: Galactic Dynamics (Second Edition) Av J. Binney och S. Tremaine s. 570 figur 7.1 och är något modifierad här.

Figur 4.2 visar den dimensionslösa energin  $-Er_e/M^2$  mot den dimensionslösa temperaturen  $r_e/(M\beta)$  för systemet, där  $\beta$  här är den inversa temperaturen. Från detta kan analog analys som i kapitel 3.3 utföras, alltså en studie av systemets värmekapacitet. Vilken i denna situation motsvaras av lutningen av kurvan. Denna är positiv från innan punkten A, då systemet ej är bundet eftersom totala energin är positiv vet vi redan inte är en stabil startpunkt. Denna förblir positiv fram till punkten B för vilken systemets totala energi blir negativ, men lutningen fortsätter vara positiv ända fram till punkten C. Om denna sekvens betraktas i den mikrokanoniska ensemblen skulle den vara instabil eftersom det betyder att den totala värmekapaciteten för sfären är positiv vilket måste tyda på att en dominerande del av sfärens innehåll faktiskt uppvisar en positiv värmekapacitet i motsats till vad virial teoremet tidigare verkade säga till oss. Men från punkten C är systemets totala värmekapacitet negativ och motsvarar således en sekvens av stabila jämviktslägen ända fram till punkten D där tecknet på värmekapaciteten vänder igen.

Dessa sekvenser av stabilitet går att relatera till jämviktskurvan i representationen i figur

4.1 därav markörerna C, D, E med kopplingen till motsvarande punkter i figur 4.2. Alltså vore det rimligt att kurvan för låga täthetskontraster i 4.1 fram till punkten C motsvarar lokala minima för entropin och på motsvarande sätt att punkterna mellan C och D som har negativ lutning motsvarar lokala entropimaxima. Vidare skulle kurvan kunna utvidgas för högre täthetskontraster som motsvarar de inre delarna av spiralkurvan i figur 4.2.

Här kommer dock främst beteendet av jämviktssekvensen från små täthetskontraster fram till punkten D undersökas noggrannare och detta med följande figur för värmekapaciteten som funktion av just täthetskontrasten.



FIGUR 4.3: Värmekapaciteten  $C_V$  plottad mot logaritmen av täthetskontrasten för sfären. Figuren är lånad från Lynden-Bell i [11] s.15 och är något modifierad här.

Vad som ses i figur 4.3 är värmekapaciteten  $C_V$  för den självgraviterande sfären som beskrivits ovan och från denna går det att dra flera slutsatser. Först kan man notera kopplingen mellan den vertikala tangenten för punkten C i figur 4.2 till punkten C i figur 4.3 där det tydligt syns att värmekapaciteten går mot oändligheten från respektive håll i enighet med den föregående figuren. Innan punkten C beter sig partiklarna i sfären mer som en ideal gas, vilket tydligast förstås eftersom då tätheten är lika mellan de olika delarna  $\ln(p_c/p_e) = 0$  är  $C_V = 3/2N$  och därmed bör det bete sig likt en fri gas för små täthetskontraster. Vad som sedan händer när koncentrationen i kärnan ökar, som en följd av högre energi i sfären, är att denna beter sig mer och mer som förväntat från virial teoremet med negativ värmekapacitet då den blir starkare bunden av gravitationen. Medan de yttre delarna förblir mycket lika den ideala gasen eftersom de gravitationella influenserna där är mindre. Om temperaturen i kärnan vid ett tillfälle vore högre än i de yttre regionerna skulle värme flöda från kärnan till dessa och temperaturen för de båda

skulle fortsätta att öka men som figuren visa skenar detta fram till när punkten C nås och den totala värmekapaciteten för sfären är negativ och därmed stabil enligt 3.15. För underkritiska täthetskontraster, alltså de under C, kan temperaturen i de yttre delarna öka snabbare än i kärnan och då kommer partiklarna i dessa regioner ha mycket stora termiska hastigheter och tillslut kommer dessa vara så höga att de snabbaste partiklarna överstiger flykthastigheten för sfären. Således är det orimligt att försöka beskriva detta system med fix energi, vilket skulle betyda att det skulle kunna förbli bundet. Enligt detta resonemang har den delen av jämviktssekvensen streckats för att visa att denna ej kan vara stabil i en mikrokanonisk ensemble, vilket även kan ses enkelt av att den totala värmekapaciteten är positiv.

Efter den kritiska punkten C, för högre energikontraster kan systemet vara bundet och är stabilt ända fram till punkten D. Detta eftersom systemets totala värmekapacitet nu är negativ vilket synes tydligt från figur 4.3. Det betyder att nu är det istället kärnan och gravitationen som dominerar och därmed bestämmer systemets karaktär. Då kärnan har tillräckligt stor andel av partiklarna kommer deras självgravitation vara så stark att även de yttre delarna, som tidigare liknades med en fri gas, blir influerade. Detta leder till att systemets totala värmekapacitet blir negativ och därmed är jämvikten från punkten C till D stabil. Denna situation kan liknas med det svarta hålet i lådan, som beskrevs i kapitel 3, där gravitationen också dominerar och bestämmer systemets utveckling mot stabil jämvikt.

Den stabila jämviktssekvensen mellan punkten C och D hålls under kontroll eftersom en temperaturskillnad mellan kärnan och sfärens rand kommer minska då de inre delarna till beloppet har större värmekapacitet än de yttre - stabilitetskravet 3.15 ännu en gång. Men för ännu större kontraster mellan kärnan och de yttre delarna av sfären sker konstigt nog det omvända och den totala värmekapaciteten blir positiv igen och vid punkten D sker då ytterligare en förändring av stabiliteten, därav streckningen av kurvan. Kvalitativt kan man säga att efter D hinner de yttre delarna inte med att värmas upp i den takt som behövs för att hindra energiflödet mellan dem och kärnan. Då blir situationen instabil och temperaturskillnaden mellan kärnan och de yttre delarna kommer fortsätta öka och därmed drivas från jämvikt. Situationen för överkritiska täthetskontraster, alltså efter D, kallas den *termogravitaionella katastrofen*. Vad som händer där är att de lokala maximan för entropin övergår till miniman, något som visades av Antonov se [15]. Detta är något som går att göra en mycket djupare analys av, dock ligger detta tyvärr utom ramarna för detta arbete men se gärna referenserna.

## 5 Diskussion

Det huvudsakliga fokuset i detta kandidatarbete var på analysen av det svarta hålet i lådan, som var ett rent tankeexperiment där välkända samband för enkla modeller antogs som givna och från detta gjordes en stabilitetsanalys med hjälp av Poincarés vändpunktsmetod. Detta gjordes i en mikrokanonisk ensemble eftersom system med negativ värmekapacitet endast kan infinna sig i stabil jämvikt i denna, vilket visades i kapitel 3.4. Med vändpunktsmetoden drogs slutsatsen att ett oladdat och icke-roterande svart hål kan vara i stabil jämvikt med svartkroppsstrålning, vid den lägsta energitätheten detta kan ske är 80% av den totala energin i lådan samlad i det svarta hålet. För högre energitätheter än denna kritiska ökar den relativa energimängden i det svarta hålet. Man kan beskriva situationen som att ett svart hål kan kondensera ut från svartkroppsstrålning av tillräckligt hög energitäthet vilket tyder på en stark grundläggande koppling mellan ett relativistiskt och ett helt kvantmekaniskt system. Detta är dock inte något som man för nuvarande experimentellt har testat.

Generalisering av resultaten gjordes för sammansättningar av allmänna system där ett av de ingående delarna har negativ värmekapacitet, likt det svarta hålet. Kravet på stabilitet var att den sammanlagda värmekapaciteten för det sammansatta systemet måste vara negativ, detta för att den negativa responsen ska kunna hinna ikapp den positiva och på så sätt kan ett jämviktsläge uppnås. Detta stabilitetskrav tillämpades även på det svarta hålet i lådan med överstämmande resultat som från vändpunktsmetoden. Det presenterades även en analog med en hink upphängd i en fjäder som gav ett bra praktiskt genomförbart experiment för att demonstrera det dynamiska beteendet av sammansättningar med delar som uppvisar negativ respons.

Sedan betraktades en mer allmän och realistisk framställning av ett system som uppvisar negativ värmekapacitet och detta gjordes i analysen av de självgraviterande partiklarna inuti en sfär i kapitel 4.3.1. Här nyttjades resultaten från tidigare arbeten och samma enkla stabilitetsanalys utflödes på dessa vilken avslöjade en mycket mer spännande dynamik för systemet än vad den naiva slutsatsen endast grundad i viral teoremet ger.

Sammanfattningsvis finns det tre skeenden av stabilitet för detta system. För startläget med låga energitätheter blir täthetskontrasten inte tillräckligt hög för att gravitationellt binda partiklarna. Sedan vid en kritiskt täthetskontrast övergår systemet till att vara stabilt då gravitationen börjar dominera, vilket igen tydes från att titta på när värmekapaciteten blev negativ i den mikrokanoniska ensemblen. Men till skillnad från det likformiga beteendet av det svarta hålet i lådan för högre och högre energitätheter uppstår det en ytterligare vändpunkt. Vid denna växlar systemets värmekapacitet tecken och efter denna blir systemet i sfären instabilt igen och fortsätter att vara det för högre och högre energitätheter. Detta kan eventuellt ha att göra med att kärnans täthet blir så stor att modellen inte tar hänsyn till alla fysikaliska processer som blir aktuella då.

Denna modell är intressant för exempelvis stjärnbildning och deras stabilitet. Den är även tillämpbar på klotformiga stjärnhopar, där varje stjärna kan betraktas som en partikel i en relativt bra sfärisk symmetrisk fördelning. Dessa stjärnhopar är något som går att observera och det går därför i viss mån att testa konsekvenserna från denna modell.

# A Appendix

## A.1 Variabelbyte för det svarta hålet i lådan

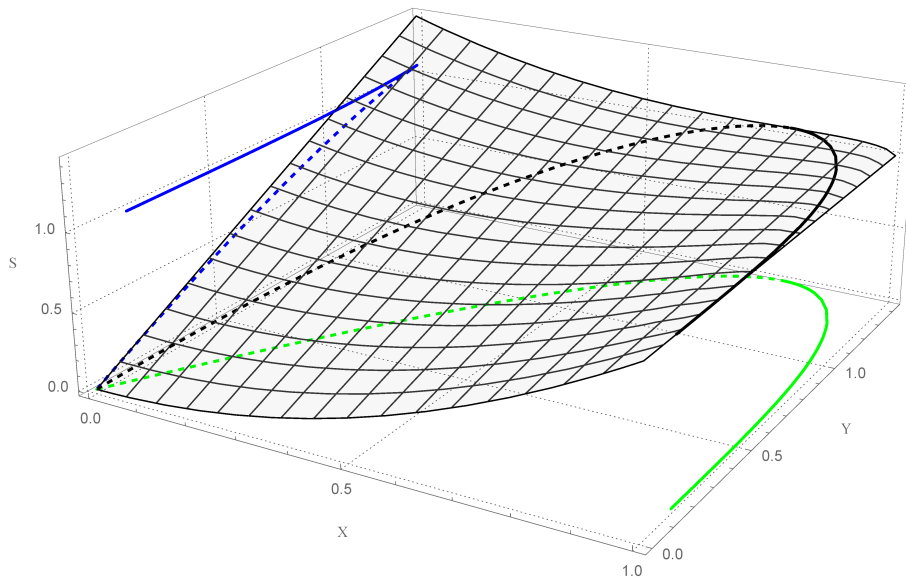
Följande variabelbyte utförs:

$$X = \frac{M}{E}, \quad Y = \frac{(aV)^{1/4}}{3\pi} E^{-5/4} \quad (\text{A.1})$$

Där nu  $Y$  agerar kontrollparameter och  $X$  är den okontrollerade variabeln som antar det värde som gör entropifunktionen stationär. Vad som är värt att notera, utöver det uppenbara variabelbytet för att få den relativa mängden energi i det svarta hålet, är att kontrollparametern nu istället relaterar till inversen av energitätheten i lådan ( $Y \propto \left(\frac{V}{E^5}\right)^{1/4}$ ).

$$\Rightarrow \hat{S}(X; Y) = 4\pi E^2 (Y(1 - X)^{3/4} + X^2) \quad (\text{A.2})$$

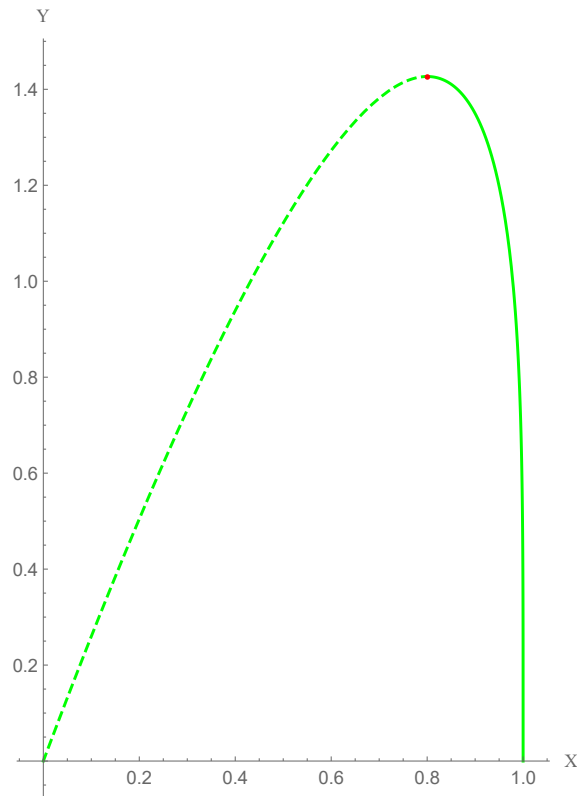
Vilket eftersom energin hålls fix är ekvivalent med att göra en stabilitetsanalys av ytan  $\hat{S}(X; Y) = Y(1 - X)^{3/4} + X^2$ .



FIGUR A.1: Kurvan i svart på entropiytan representerar jämviktslägena, i blått projektionen av denna kurvan på  $S$ - $Y$  planet och i grönt motsvarande projektion på  $X$ - $Y$  planet.

Streckningen motsvarar de instabila jämviktslägena vilka kan finnas enligt metoden i kapitel 2.3.3 eftersom figur 2.3 faktiskt är det tillhörande konjugerade diagrammet efter detta variabelbyte. Genom att sedan titta på projektionen på  $X - Y$  planet kan man hitta punkten för vilken förändringen av stabiliteten infinner sig.





FIGUR A.2: Projektionen på  $X$ - $Y$ planet av jämviktskurvan från figur A.1.

Maximum av kurvan i grönt sker för  $X = 0.8$  dvs då massan i det svarta hålet motsvarar 80% av den totala energin i lådan. Vad som vidare går att notera är att  $Y = 32/(15\sqrt[4]{5})$  är värdet på kontrollparametern vid den lägsta energitätheten som jämviktssekvensen existerar. Eftersom lägre värden på  $Y$  motsvarar högre energitätheter kan från figur A.2 tydas att den relativa mängden energi i form av det svarta hålet är en strängt växande funktion efter kondensationen har skett vid  $M = 0.8$ , vilket är rimligt från en intuitiv bild av att det krävs hög energitäthet för att svarta hål ska bildas och att dessa dominerar för högre energitätheter.

# Litteratur

- [1] G. W. Gibbons och M. J. Perry. "Black Holes and Thermal Green Functions". I: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 358.1695 (1978), s. 467–494. ISSN: 00804630. URL: <http://www.jstor.org/stable/79482>.
- [2] G. Arcioni och E. Lozano-Tellechea. "Stability and critical phenomena of black holes and black rings". I: *Physical Review D* 72.10 (2005), s. 104021. URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0412118v2>.
- [3] J. M. T. Thompson. "Stability Predictions through a Succession of Folds". I: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 292.1386 (1979), s. 1–23. ISSN: 0080-4614. URL: <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/292/1386/1>.
- [4] D. V. Schroeder. *An introduction to Thermal Physics*. Addison Wesley Longman, 2000, s. 288–295. ISBN: 0-201-38027-7.
- [5] S. W. Hawking. "Black holes and thermodynamics". I: *Phys. Rev. D* 13 (2 1976), s. 191–197. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.191>.
- [6] S. J. Blundell och K. M. Blundell. *Concepts in Thermal Physics*. 2nd ed. Oxford University Press, 2010, s. 140–153. ISBN: 978-0-19-956209-1.
- [7] H. B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. John Wiley & Sons, Inc., 1985, s. 27–32, 329–332. ISBN: 0-471-86256-8.
- [8] L. D. Landau och E. M. Liffshitz. *Statistical Physics*. Pergamon Press Ltd., 1959, s. 22–31.
- [9] K. Huang. *Statistical Mechanincs*. John Wiley & Sons, Inc., 1963, s. 139–147. ISBN: 0-471-41760-2.
- [10] P. T. Landsberg. *Thermodynamics and statistical mechanics*. New York : Dover Publications, 1990, s. 224–226. ISBN: 0-486-66493-7.
- [11] D. Lynden-Bell. "Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry". I: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 263.1 (1999), s. 293–304. URL: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9812172v1>.
- [12] R. Penrose. *The emperor's new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*. Oxford University Press, 1989, s. 309–315, 359–363. ISBN: 0-19-851973-7.
- [13] D. Lynden-Bell. "Accretion and Collapse". I: *Gravitation in Astrophysics: Cargèse 1986*. Utg. av B. Carter och J. B. Hartle. Boston, MA: Springer US, 1987, s. 155–193. ISBN: 978-1-4613-1897-2. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-1897-2\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-1897-2_4).
- [14] I. Bengtsson. "Notes on Analytical Mechanics". 2016. URL: <http://www.fysik.su.se/~ingemar/anmek.pdf>.
- [15] D. Lynden-Bell och R. Wood. "The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems". I: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 138 (1968), s. 495. URL: <http://physics.ucsd.edu/students/courses/spring2009/physics226/LyndenBellandWood.pdf>.
- [16] J. Binney och S. Tremaine. *Galactic dynamics*. Princeton University Press, 1987, s. 226–230, 500–505. ISBN: 0-691-08445-9.